

آمار و احتمال

درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید. (۱ نمره)

الف) اگر گزاره q درست باشد گزاره $p \Rightarrow q$ همواره درست است.

ب) اگر $A \subseteq B$ آن گاه $B' \cap A' = B'$

پ) اگر A و B دو مجموعه دلخواه بوده و $A \times B = B \times A$ باشد آن گاه $A = B$

ت) در پرتاب دو تاس برآمد $(1, 4)$ ظاهر شده است. در این صورت پیشامد ۶ عضوی $\{(1, 1), (2, 1), \dots, (6, 1)\}$ رخ داده است.

راهنمای تصحیح

الف) درست (۰/۲۵) (صفحه ۷)

ب) درست (۰/۲۵) (صفحه ۲۴)

پ) نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۳۲)

ت) نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۳۹)

پاسخ خیلی تشریحی

الف) چه p درست باشد و چه p نادرست باشد گزاره $p \Rightarrow T$ درست می شود پس گزاره همواره درست است.

ب) $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A' \Rightarrow B' \cap A' = B'$

پ) اگر A و B ناتهی باشند از فرض $A \times B = B \times A$ می توانیم نتیجه بگیریم $A = B$ (نه همیشه!) اما مثلاً

اگر $A = \emptyset$ باشد رابط $\emptyset \times B = B \times \emptyset$ درست است اما ممکن است $B = \emptyset$ نباشد. (مثلاً $B = \{1\}$ باشد)

ت) $(1, 4)$ عضو پیشامد داده شده نیست پس آن پیشامد رخ نداده است.

مفاهیم علم آمار و احتمال:

درس Box

تعریف	
علم آمار	شناختن جامعه نامعلوم، با استفاده از نمونه های جمع آوری شده معلوم
علم احتمال	بررسی یک نمونه نامعلوم از یک جامعه معلوم
فضای نمونه	مجموعه همه نتایج ممکن در انجام آزمایشی تصادفی
برآمد	به هر عضو فضای نمونه یک «برآمد» می گویند.
پیشامد	هر زیرمجموعه از فضای نمونه را یک پیشامد می گوئیم. اگر فضای نمونه n عضو داشته باشد، 2^n پیشامد وجود دارد.
رخداد پیشامد	اگر با انجام آزمایشی تصادفی یکی از عضوهای پیشامد رخ بدهد می گوئیم پیشامد رخ داده است.
دو پیشامد ناسازگار	A و B را دو پیشامد ناسازگار می گوئیم هرگاه $A \cap B = \emptyset$. دو پیشامد ناسازگار هرگز همزمان رخ نمی دهند.
تشخیص فضای نمونه	در صورتی که آزمایشی متشکل از دو آزمایش با فضاهای نمونه S_1 و S_2 باشد، فضای نمونه آن $S_1 \times S_2$ است. مشابه این موضوع برای هر تعداد آزمایش همزمان نیز درست است.

قضیه های ضرب دکارتی:

$A \times B$ شامل تمام زوج های مرتبی است که مؤلفه اول آن ها عضو A و مؤلفه دوم آن ها عضو B باشد. اگر A دارای m و B دارای n عضو باشد، $A \times B$ دارای $m.n$ عضو است.

خواص ضرب دکارتی:

۱) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$

۲) $A \times A = A^2$

۳) ضرب دکارتی روی $\cup$ و $\cap$ و $-$ خاصیت پخشی دارد، یعنی:

• $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

• $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

• $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

۴) ضرب دکارتی برای مجموعه‌های ناتهی و متمایز خاصیت جابه‌جایی ندارد؛ یعنی در حالت کلی

$A \times B \neq B \times A$ ؛ اما اگر A و B ناتهی باشند، از تساوی $A \times B = B \times A$ نتیجه می‌شود $A = B$.

۲

جای خالی را با اعداد یا عبارتهای مناسب تکمیل کنید. (۱ نمره)

- الف) اگر p یک گزاره دلخواه و F یک گزاره همواره نادرست باشد، آن گاه: $p \vee F \equiv \dots\dots\dots$
- ب) اگر A دارای n عضو باشد مجموعه توانی A دارای $\dots\dots\dots$ عضو است.
- پ) علم $\dots\dots\dots$ یک نمونه نامعلوم را از یک جامعه معلوم بررسی می کند.
- ت) به هر زیرمجموعه از فضای نمونه یک $\dots\dots\dots$ می گوئیم.

راهنمای تصحیح « الف) p (۰/۲۵) (صفحه های ۵ و ۶)

ب) 2^n (۰/۲۵) (صفحه ۱۷)

پ) احتمال (۰/۲۵) (صفحه ۳۶)

ت) پیشامد (۰/۲۵) (صفحه ۳۹)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ الف) اگر p درست باشد $p \vee F$ درست و اگر p نادرست باشد $p \vee F$ نادرست است، پس ارزش گزاره داده شده مانند p است.

۳

در هر سؤال گزینه درست را انتخاب کنید. (۱ نمره)

الف) در آزمایش تصادفی جنسیت ۳ فرزند، چند پیشامد ناسازگار با پیشامد $A = \{(د, د, د), (پ, د, د), (د, د, پ)\}$ وجود دارد؟

۶ (۱) ۱۶ (۲) ۴ (۳) ۶۴ (۴)

ب) $A = \{\emptyset, 1, \{1\}, 2, \{1, 2\}\}$ است. اگر $A \not\subseteq B$ و $B \subseteq A$ آن گاه مجموعه B کدام می تواند باشد؟

۱ (۱) $\{1, \{1\}\}$ (۲) $\{\{2\}\}$ (۳) $\{1, 2\}$ (۴)

راهنمای تصحیح >> الف) گزینه «۴» (۵/۰) (صفحه ۴۱)

ب) گزینه «۲» (۵/۰) (صفحه ۱۶)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ الف) فضای نمونه تولد ۳ فرزند $2^3 = 8$ عضو دارد. دو پیشامد A و B وقتی ناسازگار هستند که اشتراک آن‌ها تهی باشد پس باید تعداد پیشامدهایی را به دست آوریم که هیچ کدام از دو عضو $(پ, د, د)$ و $(د, د, پ)$ عضو آن‌ها نباشد. پس ۶ عضو دیگر فضای نمونه ممکن است عضو پیشامد B باشند یا نباشند یعنی 2^6 پیشامد مثل B وجود دارد که با A ناسازگار است.

ب) $A \not\subseteq B$ چون چنین عضو $\{1, \{1\}\}$ در بین عضوهای A نیست. ولی $\{1, \{1\}\} \subseteq A$ چون عضوهای درون آن یعنی $\{1\}$ هر دو عضو A هستند.

۴

ارزش هر گزاره را مشخص کنید. (با ذکر دلیل) (۲ نمره)

$$\text{الف) } \left(\frac{-1}{2} > \frac{-1}{3}\right) \wedge (\emptyset \subseteq A)$$

ب) اگر ۹ عددی اول باشد آن گاه ۳ هم عددی اول است.

$$\text{پ) } (x \in \mathbb{R}) \quad (-2)^0 = 1 \Leftrightarrow -x^2 \leq 0$$

راهنمای تصحیح

الف) $\left(\frac{-1}{2} > \frac{-1}{3}\right) \wedge (\emptyset \subseteq A)$ درست (۰/۲۵) ترکیب عطفی نادرست (۰/۲۵)

ب) اگر ۹ عددی اول باشد آن گاه ۳ هم عددی اول است درست (۰/۲۵) (به انتقای مقدم) نادرست (۰/۲۵)

پ) $(x \in \mathbb{R}) \quad (-2)^0 = 1 \Leftrightarrow -x^2 \leq 0$ درست (۰/۲۵) دوشروطی درست (۰/۲۵)

(صفحه ۴ تا صفحه ۱۰)

ترکیب گزاره‌ها:

درس Box

ترکیب گزاره‌ها	ریاضی	فارسی	ارزش
ترکیب فصلی	$p \vee q$	q یا p	وقتی درست است که حداقل یکی از گزاره‌های p یا q درست باشد.
ترکیب عطفی	$p \wedge q$	q و p	وقتی درست است که p و q هر دو درست باشند.
ترکیب شرطی	$p \Rightarrow q$	اگر p آن گاه q	فقط در حالت «ن $\Rightarrow$ د» نادرست است و در بقیه حالاتها درست است.
ترکیب دوشروطی	$p \Leftrightarrow q$	p اگر و فقط اگر q	وقتی درست است که p و q هم‌ارزش باشند.
نقیض	$\sim p$	نقیض p	ارزش آن برعکس p است.

۵

با استفاده از جدول ارزش زیر درستی هم‌ارزی $p \Rightarrow \sim q \equiv \sim (p \wedge q)$ را نشان دهید. (۱/۵ نمره)

(جدول را در پاسخ‌نامه وارد کنید.)

p	q				
د	د				
د	ن				
ن	د				
ن	ن				

راهنمای تصحیح

(۰/۲۵)

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow \sim q$	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$
د	د	ن	ن	د	ن
د	ن	د	د	ن	د
ن	د	ن	د	ن	د
ن	ن	د	د	ن	د

(۰/۲۵)

(۰/۲۵)

(۰/۲۵)

(۰/۲۵)

یکسان‌شدن ستون دو طرف هم‌ارزی (۰/۲۵)

(صفحه ۳ تا ۱۰)

با وارد کردن جدول زیر در پاسخ‌برگ و سپس تکمیل آن، نشان دهید که: $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$. (۱ نمره) (نهایی فرداد ۱۴۰۳)

p	q			
د	د			
د	ن			
ن	د			
ن	ن			

پاسخ:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	د	ن	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

جدول ارزش گزاره‌ها:

ترکیب	فارسی	جدول ارزش	نکات															
نقیض $\sim p$	چنین نیست که p	<table><tr><td>p</td><td>$\sim p$</td></tr><tr><td>د</td><td>ن</td></tr><tr><td>ن</td><td>د</td></tr></table>	p	$\sim p$	د	ن	ن	د	(۱) ارزش آن برعکس p است. (۲) $\sim(\sim p) \equiv p$									
p	$\sim p$																	
د	ن																	
ن	د																	
عطفی $p \wedge q$	p و q	<table><tr><td>p</td><td>q</td><td>$p \wedge q$</td></tr><tr><td>د</td><td>د</td><td>د</td></tr><tr><td>د</td><td>ن</td><td>ن</td></tr><tr><td>ن</td><td>د</td><td>ن</td></tr><tr><td>ن</td><td>ن</td><td>ن</td></tr></table>	p	q	$p \wedge q$	د	د	د	د	ن	ن	ن	د	ن	ن	ن	ن	(۱) فقط در حالتی که هر دو درست باشند، $p \wedge q$ درست می‌شود. (۲) اگر یکی هم نادرست باشد، $p \wedge q$ نادرست می‌شود. (۳) $p \wedge T \equiv p$ (۴) $p \wedge F \equiv F$ (۵) $p \wedge \sim p \equiv F$
p	q	$p \wedge q$																
د	د	د																
د	ن	ن																
ن	د	ن																
ن	ن	ن																
فصلی $p \vee q$	p یا q	<table><tr><td>p</td><td>q</td><td>$p \vee q$</td></tr><tr><td>د</td><td>د</td><td>د</td></tr><tr><td>د</td><td>ن</td><td>د</td></tr><tr><td>ن</td><td>د</td><td>د</td></tr><tr><td>ن</td><td>ن</td><td>ن</td></tr></table>	p	q	$p \vee q$	د	د	د	د	ن	د	ن	د	د	ن	ن	ن	(۱) اگر حداقل یکی درست باشد، $p \vee q$ درست می‌شود. (۲) فقط در حالتی که هر دو نادرست باشند، $p \vee q$ نادرست است. (۳) $p \vee T \equiv T$ (۴) $p \vee F \equiv p$ (۵) $\sim p \vee p \equiv T$ (۶) پخشی $\begin{cases} p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \end{cases}$ (۷) دموگان $\begin{cases} \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \\ \sim(p \wedge q) \equiv p \vee \sim q \end{cases}$ (۸) جذب $\begin{cases} p \vee (p \wedge q) \equiv p \\ p \wedge (p \vee q) \equiv p \end{cases}$
p	q	$p \vee q$																
د	د	د																
د	ن	د																
ن	د	د																
ن	ن	ن																
شرطی $p \Rightarrow q$	اگر p آن‌گاه q	<table><tr><td>p</td><td>q</td><td>$p \Rightarrow q$</td></tr><tr><td>د</td><td>د</td><td>د</td></tr><tr><td>د</td><td>ن</td><td>ن</td></tr><tr><td>ن</td><td>د</td><td>د</td></tr><tr><td>ن</td><td>ن</td><td>د</td></tr></table>	p	q	$p \Rightarrow q$	د	د	د	د	ن	ن	ن	د	د	ن	ن	د	(۱) p را فرض (مقدم) و q را حکم (تالی) می‌گوییم. (۲) فقط در حالتی که فرض درست و حکم نادرست باشد، نادرست است و در بقیه حالات درست است. (۳) اگر فرض (p) نادرست باشد، $p \Rightarrow q$ (صرف نظر از ارزش q) درست است. در این حالت می‌گوییم گزاره به انتفای مقدم درست است. (۴) اگر حکم (q) درست باشد، $p \Rightarrow q$ (صرف نظر از ارزش p) درست است. $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ $\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$ $p \Rightarrow q \equiv \underbrace{\sim q \Rightarrow \sim p}_{\text{(عکس نقیض)}}$
p	q	$p \Rightarrow q$																
د	د	د																
د	ن	ن																
ن	د	د																
ن	ن	د																
دوشرطی $p \Leftrightarrow q$	p اگر و فقط اگر q p شرط لازم و کافی برای q است. اگر p آن‌گاه q و برعکس	<table><tr><td>p</td><td>q</td><td>$p \Leftrightarrow q$</td></tr><tr><td>د</td><td>د</td><td>د</td></tr><tr><td>د</td><td>ن</td><td>ن</td></tr><tr><td>ن</td><td>د</td><td>ن</td></tr><tr><td>ن</td><td>ن</td><td>د</td></tr></table>	p	q	$p \Leftrightarrow q$	د	د	د	د	ن	ن	ن	د	ن	ن	ن	د	فقط در حالتی درست است که ارزش دو گزاره یکسان باشد. $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
p	q	$p \Leftrightarrow q$																
د	د	د																
د	ن	ن																
ن	د	ن																
ن	ن	د																

برای این که با جدول ارزش، درستی یک هم‌ارزی را ثابت کنیم به صورت زیر عمل می‌کنیم:

 (۱) اگر دو گزاره p و q به کار رفته باشد، ۴ ردیف (مثل این سؤال) قرار می‌دهیم.

(۲) برای هر گزاره ترکیبی یک ستون قرار داده و در هر ردیف ارزش آن را معلوم می‌کنیم.

(۳) ستون‌های دو گزاره‌ای که می‌خواهیم هم‌ارزی آن‌ها را نشان دهیم باید یکسان دربیایند.

۶ ارزش گزاره « $(\exists x \in \mathbb{R}; \frac{2x-1}{x} = 0) \wedge (\forall y \in \mathbb{N}; y > \frac{1}{y})$ » را با ذکر دلیل مشخص کرده و سپس نقیض آن را بنویسید. (۲ نمره)

راهنمای تصحیح: گزاره $\exists x \in \mathbb{R}; \frac{2x-1}{x} = 0$ درست (۰/۲۵) است چون مجموعه جواب ناتهی است ($x = \frac{1}{2}$ وجود دارد). (۰/۲۵)

گزاره $\forall y \in \mathbb{N}; y > \frac{1}{y}$ نادرست (۰/۲۵) است چون به ازای $y = 1$ گزاره $1 > \frac{1}{1}$ درست نیست. (۰/۲۵)

چون یکی نادرست است، ترکیب عطفی دو گزاره نادرست است. (۰/۲۵)

نقیض: طبق قانون دمورگان $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ پس داریم:

$$\underbrace{(\forall x \in \mathbb{R}; \frac{2x-1}{x} \neq 0)}_{(0/25)} \vee \underbrace{(\exists y \in \mathbb{N}; y \leq \frac{1}{y})}_{(0/25)} \quad (\text{صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳})$$

نقیض گزاره‌ها: برای نقیض کردن هر کدام از گزاره‌ها به صورت زیر عمل می‌کنیم:

گزاره	نقیض	توضیح
p	$\sim p$	فعل جمله را منفی می‌کنیم.
$p \vee q$	$\sim p \wedge \sim q$	نقیض (p یا q) به صورت نقیض p و نقیض q می‌شود.
$p \wedge q$	$\sim p \vee \sim q$	نقیض (p و q) به صورت نقیض p یا نقیض q می‌شود.
$p \Rightarrow q$	$p \wedge \sim q$	فرض را نگه داشته و حکم را نقیض می‌کنیم.
$p \Leftrightarrow q$	$p \Leftrightarrow \sim q$ یا $\sim p \Leftrightarrow q$	یکی از p یا q را نقیض می‌کنیم.
$\forall x \in U; p(x)$	$\exists x \in U; \sim p(x)$	«هر» تبدیل به «وجود دارد» شده و $p(x)$ را هم نقیض می‌کنیم.
$\exists x \in U; p(x)$	$\forall x \in U; \sim p(x)$	«وجود دارد» تبدیل به «هر» شده و $p(x)$ را هم نقیض می‌کنیم.

سورها و ارزش آن‌ها:

نوع سور	نماد	فارسی	ارزش
عمومی	$\forall$	به ازای هر	وقتی درست است که به ازای هر x عضو U ، $p(x)$ درست باشد.
وجودی	$\exists$	به ازای برخی (یا وجود دارد).	وقتی درست است که به ازای حداقل یک x از U ، $p(x)$ درست باشد. (یک عدد وجود داشته باشد و مجموعه جواب تهی نباشد).

حواست باشه که! نقیض $a = b$ به صورت $a \neq b$ و نقیض $a > b$ به صورت $a \leq b$ و نقیض $a \geq b$ به صورت $a < b$ نوشته می‌شود.

با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید: (۷/۵ نمره)

۷

$$(A \cap B) - (A \cap C) = A \cap (B - C)$$

راهنمای تصحیح

$$(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)' \quad (۰/۲۵) \text{ (تفاضل به اشتراک)}$$

$$= (A \cap B) \cap (A' \cup C') \quad (۰/۲۵) \text{ (دمورگان)}$$

$$= (A \cap B \cap A') \cup (A \cap B \cap C') \quad (۰/۲۵) \text{ (پخشی)}$$

$$= (\emptyset \cap B) \cup (A \cap (B \cap C')) \quad (۰/۲۵)$$

$$= \emptyset \cup (A \cap (B - C)) \quad (۰/۲۵)$$

$$= A \cap (B - C) \quad (۰/۲۵)$$

(صفحه‌های ۲۳ تا ۲۹)

جبر مجموعه‌ها: برای اثبات درستی یک رابطه در جبر مجموعه‌ها بهتر است از سمت شلوغ‌تر شروع کرده و از روابط زیر استفاده کنیم تا به طرف دیگر برسیم.

تفاوتی نمی‌کند کدام دوتا را اول اجتماع بگیریم. : قوانین شرکت‌پذیری

$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{A \cup (B \cap C)} = \overline{(A \cup B) \cap (A \cup C)} \\ \overline{A \cap (B \cup C)} = \overline{(A \cap B) \cup (A \cap C)} \end{cases}$$

قوانین پخشی (عکس آن فاکتورگیری):

$$\begin{cases} A \cup B = B \\ A \cap B = A \\ A - B = \emptyset \end{cases} \quad A \subseteq B \quad \text{(تمامی روابط دوطرفه هستند.)}$$

$$\begin{cases} (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{cases} \quad \text{قوانین دمورگان}$$

$$\begin{cases} X \subseteq A \\ X \subseteq A' \end{cases} \Rightarrow X \subseteq \underbrace{A \cap A'}_{\emptyset} \Rightarrow X = \emptyset$$

$$\begin{cases} A \subseteq X \\ A' \subseteq X \end{cases} \Rightarrow \underbrace{A \cup A'}_U \subseteq X \Rightarrow X = U$$

قوانین زیرمجموعه و متمم:

$$A - B = A \cap B' \quad \text{قانون تبدیل تفاضل به اشتراک}$$

$$\begin{cases} \overline{A \cup (A \cap B)} = A & (A \cap B \subseteq A \text{ چون}) \\ \overline{A \cap (A \cup B)} = A & (A \subseteq A \cup B \text{ چون}) \end{cases} \quad \text{قوانین جذب}$$

در جای خالی مجموعه درست را قرار دهید: (۱ نمره)

$$\begin{cases} X \subseteq A \\ \wedge \\ X \subseteq A' \end{cases} \Rightarrow X = \dots\dots \text{ (الف)}$$

$$(A \cup B) \cap (C \cup (A \cup B)) = \dots\dots \text{ (ب)}$$

راهنمای تصحیح << (الف) (۰/۵)

$$A \cup B \text{ (ب) (۰/۵) (صفحه ۲۶)}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ (الف)

$$X \subseteq \underbrace{A \cap A'}_{\emptyset} \Rightarrow X = \emptyset$$

(ب) طبق قانون جذب حاصل برابر $A \cup B$ است چون $A \cup B \subseteq C \cup (A \cup B)$

۹ ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ آن گاه $A - B = \emptyset$ (۱ نمره)

راهنمای تصحیح « روش ۱» $A - B$ شامل عضوایی است که در A باشند ولی در B نباشند:

$$A - B = \{x \in U \mid \underbrace{x \in A \wedge x \notin B}_{(۰/۵)}\} \subseteq \{x \in U \mid \underbrace{x \in B \wedge x \notin B}_{(۰/۲۵)}\}$$

$$A - B \subseteq \emptyset \Rightarrow A - B = \emptyset \quad (۰/۲۵)$$

دقت کنید که اگر $x \in A$ باید $x \in B$ چون $A \subseteq B$.

روش ۲ برهان خلف: فرض کنیم $A - B \neq \emptyset$ پس $x \in A$ وجود دارد که $x \notin B$. (۰/۵)

اما اگر $x \in A$ آن گاه $x \in B$ به تناقض رسیدیم. (۰/۲۵) خلاف حکم نادرست و خود حکم درست است. (صفحه ۲۰)

۱۰ اگر یک عضو جدید به مجموعه A اضافه کنیم، نسبت تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه جدید به تعداد زیرمجموعه‌های ناتمامی و سره مجموعه A برابر $\frac{64}{31}$ می‌شود. با ذکر دلیل مشخص کنید مجموعه A چند عضو دارد؟ (۱/۵ نمره)

راهنمای تصحیح >> فرض کنیم مجموعه A دارای n عضو باشد، پس $2^n - 2$ زیرمجموعه ناتمامی و سره دارد. یک عضو به A اضافه کنیم (۰/۲۵)

دارای n+1 عضو و 2^{n+1} زیرمجموعه می‌شود پس: (۰/۲۵)

$$\begin{aligned} \frac{2^{n+1} - 2}{2^n - 2} &= \frac{64}{31} \Rightarrow 31 \times 2^{n+1} = 64(2^n - 2) \Rightarrow 31 \times 2^{n+1} = 2^{n+6} - 128 \\ \Rightarrow \underbrace{2^{n+6} - 31 \times 2^{n+1}}_{(0/25)} &= 128 \Rightarrow \underbrace{2^{n+1}(32 - 31)}_{(0/25)} = 128 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow n+1=7 \Rightarrow n=6 \quad (0/25) \quad (\text{صفحه ۱۷})$$

(اگر بعد از نوشتن معادله با جست‌وجو نیز n را به دست آورده نمره کامل تعلق گیرد)

تعداد زیرمجموعه‌ها با شرایط خاص:

(۱) تعداد کل زیرمجموعه‌های مجموعه n عضوی: 2^n

(۲) تعداد کل زیرمجموعه‌های مجموعه n عضوی شامل یا فاقد k عضو خاص: 2^{n-k}

(چون k عضو خاص یک حالت دارند ولی بقیه دو حالت دارند، ممکن است عضو زیرمجموعه باشند یا نباشند.)

(۳) تعداد زیرمجموعه‌های ناتمامی: $2^n - 1$

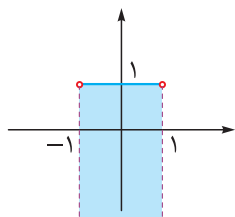
(۴) تعداد زیرمجموعه‌های سره (غیرمساوی با خودش): $2^n - 1$

(۵) تعداد زیرمجموعه‌های ناتمامی و سره: $2^n - 2$

اگر $A = (-\infty, 1]$ و $B = (-1, 1)$ باشد، نمودار ضرب دکارتی $B \times A$ را رسم کنید. (۱ نمره)

۱۱

راهنمای تصحیح ▶ مجموعه B را روی محور x ها و مجموعه A را روی محور y ها مشخص می کنیم:



(صفحه های ۳۰ تا ۳۲)

رسم سطح درست شکل (۰/۵)، خط ممتد ضلع بالایی (۰/۲۵) و خط چین بودن اضلاع کناری (۰/۲۵)

نمودار ضرب دکارتی:

زوج مرتب‌هایی (نقاطی) که مؤلفه اول آن‌ها از A و مؤلفه دوم آن‌ها از B هستند.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

برای رسم نمودار $A \times B$ ، مجموعه A را روی محور x و مجموعه B را روی محور y مشخص می کنیم. بسته به این که مجموعه‌های A و B چگونه باشند، نمودار به صورت‌های زیر درمی آید:

مثال	نمودار	شکل A و B
$A \times B$	$B = \{0, 3, 4\}, A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ $A \times B = \{(1, 0), (1, 3), (1, 4), (-1, 0), \dots\}$	دو مجموعه متناهی
$A \times B$ $B \times A$	اگر فرض کنیم: $B = \{1, 2\}, A = \{1, 2\}$	تعدادی خط (نیم خط) یا پاره خط عمودی یا افقی
$A \times B$	در صورتی که $B = [0, 2], A = [1, 4]$	هر دو بازه باشند

درس Box

۱۲

یک تیم والیبال ۱۰ عضو دارد که قد هیچ دو نفر آن‌ها برابر نیست. آن‌ها یکی پس از دیگری وارد سالن می‌شوند. (۵/۷ نمره)

الف) با کدام احتمال کوتاه‌قدترین فرد نفر اول وارد سالن می‌شود؟

ب) با کدام احتمال نفر اول کوتاه‌قدترین فرد است یا بلندقدترین؟

پ) با کدام احتمال بلندقدترین و کوتاه‌قدترین فرد پشت سر هم وارد سالن می‌شوند و بلندقدترین جلوتر از کوتاه‌قدترین است؟

راهنمای تصحیح

الف) تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر $n!$ است، پس:

$$n(S) = 10!$$

(نفر اول یک حالت است و بقیه ۹! حالت دارند.)

$$P(A) = \frac{1 \times 9!}{10!} = \frac{1}{10} \quad (۵/۷)$$

ب) روش ۱: پیشامد نفر اول کوتاه‌قدترین باشد و پیشامد یا نفر اول بلندقدترین باشد، ناسازگارند پس:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \quad (۵/۷)$$

$$P(\text{مطلوب}) = \frac{2 \times 9!}{10!} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \quad (۵/۷)$$

روش ۲

پ) کوتاه‌قدترین و بلندقدترین فرد را a و b می‌گیریم و آن‌ها را در یک دسته قرار می‌دهیم:

$$P(\text{مطلوب}) = \frac{9!}{10!} = \frac{1}{10} \quad (۵/۷)$$

دقت دارید که ۸ نفر بقیه به همراه دسته بالا ۹ شیء هستند که ۹! جایگشت دارند.

(صفحه ۴۳)

۱۳

یک راننده تاکسی خطی در ایستگاه منتظر می ماند تا حداقل ۲ مسافر و حداکثر ۴ مسافر سوار کند. در مسیر

برگشت نیز همین اتفاق می افتد. (۱ نمره)

الف) اگر فقط تعداد مسافرها در مسیر رفت و برگشت مهم باشد، فضای نمونه یک بار رفت و برگشت را بنویسید.

ب) پیشامد آن که تاکسی در مسیر رفت و برگشت در مجموع حداقل ۷ مسافر داشته باشد را بنویسید.

تعداد مسافرها در مسیر رفت $\{2, 3, 4\}$ و در مسیر برگشت هم همین است.

الف)

$$\text{فضای نمونه} = \underbrace{\{2, 3, 4\} \times \{2, 3, 4\}}_{(0/25)} = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\} \quad (0/25)$$

ب) کافی است زوج مرتب‌هایی را بنویسیم که جمع مؤلفه اول و دوم آن‌ها حداقل برابر ۷ باشد:

$$A = \{(3, 4), (4, 3), (4, 4)\} \quad (0/5)$$

(صفحه ۴۰)

راهنمای تصحیح

۱۴

عددی به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۲۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال‌های زیر را با نوشتن فرمول‌های مناسب محاسبه

کنید: (۱ نمره)

الف) عدد انتخابی بر ۳ یا ۵ بخش پذیر باشد.

ب) عدد انتخابی بر ۳ بخش پذیر باشد ولی بر ۵ بخش پذیر نباشد.

راهنمای تصحیح

تعداد مضارب عدد k در بین اعداد $۱, ۲, \dots, n$ برابر است با $\left[\frac{n}{k}\right]$.

حالا تعریف می‌کنیم:

پیشامد بخش پذیری بر ۳: A :

پیشامد بخش پذیری بر ۵: B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (۰/۲۵) \quad \text{الف)}$$

$$= \frac{\left[\frac{۲۰۰}{۳}\right]}{۲۰۰} + \frac{\left[\frac{۲۰۰}{۵}\right]}{۲۰۰} - \frac{\left[\frac{۲۰۰}{۱۵}\right]}{۲۰۰} = \frac{۶۶ + ۴۰ - ۱۳}{۲۰۰} = \frac{۹۳}{۲۰۰} \quad (۰/۲۵)$$

دقت دارید که پیشامد بخش پذیری بر ۳ یا ۵ همان $A \cup B$ است.

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \quad \text{ب)}$$

$$= \frac{\left[\frac{۲۰۰}{۳}\right]}{۲۰۰} - \frac{\left[\frac{۲۰۰}{۱۵}\right]}{۲۰۰} = \frac{۶۶ - ۱۳}{۲۰۰} = \frac{۵۳}{۲۰۰} \quad (۰/۲۵)$$

دوره قوانین احتمال

درس Box

۱	احتمال رخدادن A یا B	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
۲	احتمال رخداد A و عدم رخداد B	$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
۳	احتمال آن که A رخ ندهد.	$P(A') = 1 - P(A)$
۴	احتمال آن که فقط یکی از A و B رخ بدهد.	$P((A - B) \cup (B - A)) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$
۵	احتمال آن که نه A رخ بدهد و نه B	$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B)$
۶	احتمال آن که حداکثر یکی از A و B رخ بدهد.	$P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B)$

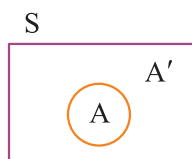
تعداد مضارب عدد k در بین اعداد $۱, ۲, ۳, \dots, n$ برابر است با: $\left[\frac{n}{k}\right]$

نکته

۱۵

با توجه به اصول احتمال ثابت کنید اگر A پیشامدی دلخواه در فضای نمونه S باشد، $P(A') = 1 - P(A)$ (۱ نمره)

راهنمای تصحیح»



$$S = A \cup A' \quad (۰/۲۵)$$

$$P(S) = 1 \Rightarrow P(A \cup A') = 1 \quad (۰/۲۵)$$

چون A و A' دو پیشامد ناسازگار هستند (۰/۲۵) احتمال اجتماع آن‌ها تبدیل به جمع احتمال آن‌ها می‌شود:

$$\underbrace{P(A) + P(A')}_{(۰/۲۵)} = 1 \Rightarrow P(A') = 1 - P(A) \quad (\text{صفحه ۴۲})$$

۱۶ ۶ دونه در یک مسابقه شرکت کرده‌اند. احتمال برد a یا b برابر $\frac{1}{4}$ و احتمال آن که هیچ کدام از e و f برنده

نشوند برابر $\frac{4}{5}$ است. احتمال آن که هیچ کدام از c و d برنده نشوند چه قدر است؟ (در مسابقه فقط یک نفر برنده می‌شود.) (۱ نمره)

راهنمای تصحیح >>

فضای نمونه $S = \{a, b, c, d, e, f\}$

$$P(\{a, b\}) = P(a) + P(b) = \frac{1}{4}$$

اگر e و f هیچ کدام برنده نشوند، یکی از a, b, c, d برنده می‌شود، پس داریم:

$$P(\{a, b, c, d\}) = \frac{4}{5} \Rightarrow \underbrace{P(\{a, b\})}_{\frac{1}{4}} + P(\{c, d\}) = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow P(\{c, d\}) = \frac{4}{5} - \frac{1}{4} = \frac{11}{20} \quad (✓/۵)$$

$$P(S) = 1 \Rightarrow P(\{a, b, c, d, e, f\}) + P(\{c, d\}) = 1 \quad (✓/۲۵) \quad \text{مجموع احتمال برابر ۱ است:}$$

$$\Rightarrow P(\{a, b, e, f\}) + \frac{11}{20} = 1$$

$$\Rightarrow P(\{a, b, e, f\}) = \frac{9}{20} \quad (✓/۲۵) \quad (\text{صفحه‌های ۴۴ تا ۴۶})$$

احتمال غیرهم‌شانس

درس Box

اگر احتمال رخ دادن حداقل دو عضو فضای نمونه متفاوت باشد، می‌گوییم فضای نمونه غیرهم‌شانس است.

در فضای نمونه غیرهم‌شانس S ، سعی می‌کنیم کوچک‌ترین احتمال را X و بقیه را بر حسب آن بنویسیم:

S	s_1	s_2	$\dots$	s_n
احتمال	$P(s_1)$	$P(s_2)$	$\dots$	$P(s_n)$

$$۱) \text{ جمع احتمال‌ها } = 1 \Rightarrow P(s_1) + \dots + P(s_n) = 1$$

$$۲) \underbrace{P(\{s_1, s_2\})}_{\text{احتمال } s_1 \text{ یا } s_2} = P(s_1) + P(s_2)$$

$$۳) P(s_1) = 1 - P(\text{بقیه}) \quad \text{یا} \quad P(\{s_1, s_2\}) = 1 - P(\text{بقیه})$$

نکته >