

ریاضیات گسسته

درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید. (نیازی به ارائه دلیل نیست.) (۱ نمره)

- الف) اگر α و β دو عدد گنگ ولی $\alpha + \beta$ گویای ناصفر باشد، عدد $\alpha^2 - \beta^2$ حتماً گنگ است.
 ب) اگر $[a, b] = 7$ آن گاه داریم:
 $\forall m > 0; a | m, b | m \Rightarrow 7 \leq m$
 پ) عدد $302 -$ به دسته هم‌نهشتی $[1]_7$ تعلق دارد.
 ت) در هر گراف تهی، تمام مجموعه‌های $N_G[a]$ تک‌عضوی هستند. (a رأس دلخواهی از گراف است)

۱

راهنمای تصحیح (الف) درست (۰/۲۵) (صفحه ۸ - تمرین ۳)

(ب) درست (۰/۲۵) (صفحه ۱۳)

(پ) نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۱۸)

(ت) درست (۰/۲۵) (صفحه ۳۶)

پاسخ خیلی تشریحی ✓

- الف) گنگ = گویای ناصفر $\times$ گنگ = $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 - \beta^2$
 دقت دارید که $\alpha - \beta$ گنگ است چون:
 $\alpha - \beta = \underbrace{\alpha + \beta}_{\text{گویا}} - \underbrace{\beta^2}_{\text{گنگ}}$
 ب) طبق تعریف ک.م.م درست است. مضارب مثبت دیگر a و b مثل m بزرگ‌تر یا مساوی ۷ (که ک.م.م دو عدد a و b است) هستند.
 پ) $302 = 7 \times (-44) + 6$ ، پس $302 \in [6]_7$.
 ت) گراف تهی، یال ندارد و همه رأس‌ها ایزوله هستند بنابراین به ازای هر رأس a از گراف $N_G[a] = \{a\}$.

در مورد گویا یا گنگ بودن جمع، تفریق و ضرب دو عدد α و β داریم:

α, β	ضرب	جمع و تفریق
هر دو گویا	گویا (اثبات مستقیم)	گویا (اثبات مستقیم)
یکی گویا و یکی گنگ	اگر عدد گویا صفر باشد، برابر صفر ولی ضرب عدد گویای ناصفر در گنگ، گنگ است.	گنگ (برهان خلف)
هر دو گنگ	ممکن است گنگ یا گویا	ممکن است گنگ یا گویا

توجه: اثبات گنگ بودن اعداد با برهان خلف (اثبات غیرمستقیم) انجام می‌شود. یعنی فرض می‌کنیم عبارت داده‌شده گنگ نباشد پس گویا بوده و بعد آن را به تناقض می‌رسانیم.

تعریف ب.م.م و ک.م.م:

تعریف بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b : عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد a و b (که هر دو با هم صفر نیستند) می‌گوییم و می‌نویسیم $(a, b) = d$ هرگاه:

(۱) d مقسوم‌علیه دو عدد باشد یعنی $d | a$ و $d | b$.

(۲) اگر m مقسوم‌علیه مثبت دیگری از دو عدد باشد، یعنی $m | a$ و $m | b$ آن گاه m از d کوچک‌تر یا مساوی با آن باشد یعنی $m \leq d$.

پس شد: $\forall m > 0; m | a, m | b \Rightarrow m \leq d$

تعریف کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد a و b : دو عدد ناصفر a و b را در نظر بگیرید. عدد طبیعی c را ک.م.م دو عدد a و b می‌گوییم و می‌نویسیم $[a, b] = c$ هرگاه:

(۱) عدد c مضرب هر دو عدد باشد یعنی $a | c$ و $b | c$.

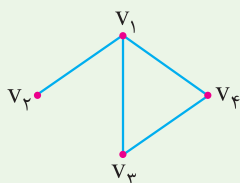
درس Box

۲) اگر مضرب دیگری مثل m از دو عدد وجود داشته باشد، m بزرگتر یا مساوی c باشد (یعنی c کوچکتر باشد) به زبان ریاضی:

$$\forall m > 0; a | m, b | m \Rightarrow c \leq m$$

مجموعه همسایه‌های باز یک رأس: مجموعه همه رأس‌هایی که در گراف G با رأس v مجاورند را، همسایه‌های باز رأس v گفته و آن را با $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم.

مثلاً در گراف زیر $N_G(v_1) = \{v_2, v_3, v_4\}$ یا $N_G(v_2) = \{v_1\}$ یا $N_G(v_3) = \{v_1, v_4\}$.



تعداد عضوهای همسایه باز رأس v برابر $\deg(v)$ است: مثلاً $|N_G(v_1)| = \deg(v_1) = 3$.

اگر $N_G(v) = \emptyset$ باشد، رأس v ایزوله است.

مجموعه همسایگی بسته رأس v : اگر به مجموعه همسایه‌های باز رأس v ، خود رأس v را هم اضافه کنیم،

مجموعه همسایه‌های بسته v به دست می‌آید که آن را با $N_G[v]$ نمایش می‌دهیم.

$$N_G[v_2] = \{v_1, v_2\} \text{ مثلاً}$$

نکته

نکته

جای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید. (۱ نمره)

الف) اگر a عددی طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ بوده و دو عدد $7m+6$ و $2m+1$ بر a بخش‌پذیر باشند آن‌گاه $a = \dots\dots\dots$

ب) هر دو عدد فرد متوالی نسبت به هم هستند.

پ) اگر $12a \equiv 16 \pmod{8}$ آن‌گاه دو عدد $3a$ و 4 به پیمانه هم‌نهشت هستند.

ت) گراف کامل مرتبه ۷ گرافی منتظم است.

راهنمای تصحیح >> الف) ۵ (۰/۲۵) (صفحه ۱۱)

ب) اول (۰/۲۵) (صفحه ۱۳)

پ) ۲ (۰/۲۵) (صفحه ۲۲)

ت) ۶ (۰/۲۵) (صفحه ۳۸)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ الف)

$$a \mid 7m+6 \xrightarrow{\times 2} a \mid 14m+12 \xrightarrow{\oplus} a \mid 5 \xrightarrow{a>1} a=5$$

$$a \mid 2m+1 \xrightarrow{\times(-7)} a \mid -14m-7$$

ب) ب.م.م هر دو عدد فرد متوالی برابر ۱ است، پس نسبت به هم اول هستند.

$$12a \equiv 16 \pmod{8} \xrightarrow[\div 4]{(12,4)=4} 3a \equiv 4 \pmod{2} \Rightarrow 3a \equiv 0 \pmod{2}$$

ت) در هر گراف کامل K_p ، درجه هر رأس برابر $p-1$ است. در گراف K_7 درجه هر رأس برابر ۶ است، پس این گراف ۶- منتظم است.

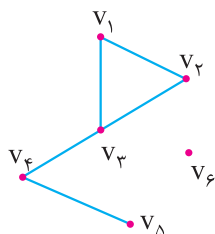
۳

گزینه درست را انتخاب کنید. (نیازی به ارائه راه حل نیست.) (۱ نمره)

الف حاصل $[(a, b), b]$ برابر با کدام گزینه است؟

- (۱) $|a|$ (۲) $|b|$
(۳) (a, b) (۴) $[a, b]$

ب) کدام گزینه زیرگراف گراف روبه‌رو است؟



(۱) $E = \{v_1v_2, v_2v_3\}$ و $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

(۲) $E = \{v_1v_2, v_2v_6\}$ و $V = \{v_1, v_2, v_5, v_6\}$

(۳) $E = \{v_2v_3, v_3v_6\}$ و $V = \{v_2, v_3, v_6\}$

(۴) $E = \{v_3v_4\}$ و $V = \{v_2, v_4, v_6\}$

راهنمای تصحیح >> الف) گزینه «۲» (۵/۰) (صفحه ۱۳)

ب) گزینه «۱» (۵/۰) (صفحه ۳۷)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ الف) $b | (a, b)$ چون ب.م.م دو عدد a و b هم a را عاد می‌کند و هم b را، پس ک.م.م (a, b) و b همان $|b|$ می‌شود.

ب) زیرگراف H از گراف G ، گرافی است که مجموعه رأس‌های H زیرمجموعه رأس‌های G و یال‌های H نیز زیرمجموعه یال‌های G باشد.

در گزینه (۱) هم رأس‌ها زیرمجموعه رأس‌های G هستند و هم یال‌ها.

در گزینه (۲) یال v_2v_6 در خود گراف وجود ندارد.

در گزینه (۳) رأس v_6 عضو رأس‌های G نیست.

در گزینه (۴) یال v_2v_4 در خود گراف وجود ندارد.

به روش در نظر گرفتن همه حالت‌ها نشان دهید که به ازای هر عدد صحیح n ، عدد $n^2 + 2n$ زوج است. (۱ نمره)

راهنمای تصحیح « n زوج است یا فرد

$$n = 2k \Rightarrow n^2 + 2n = \underbrace{(2k)^2 + 2(2k)}_{(0/25)} = \underbrace{2k(2k+2)}_q = 2q \quad (0/25)$$

$$n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 + 2n = \underbrace{(2k+1)^2 + 2(2k+1)}_{(0/25)} = 4k^2 + 4k + 1 + 4k + 2 = 4k^2 + 8k + 3 = 4k^2 + 1 + 4k + 2$$

$$= 2(2k^2 + 4k + 2) = 2q \quad (0/25)$$

پس n چه زوج باشد و چه فرد عدد $n^2 + 2n$ زوج است.

(صفحه ۴)

درجی Box

افراز اعداد صحیح:

عدد صحیح n را در نظر بگیرید:

- اگر آن را بر ۲ تقسیم کنیم باقی‌مانده برابر صفر یا ۱ می‌شود؛ پس:
هر عدد صحیح به صورت $n = 2k$ یا $n = 2k + 1$ است (یعنی هر عدد صحیح، زوج است یا فرد).
 - اگر آن عدد را بر ۳ تقسیم کنیم باقی‌مانده برابر صفر، ۱ یا ۲ می‌تواند باشد پس:
هر عدد صحیح به یکی از شکل‌های $3k$ ، $3k + 1$ یا $3k + 2$ نوشته می‌شود؛ به زبان دیگر اعداد صحیح به ۳ زیرمجموعه افراز می‌شود.
- اگر بخواهیم حکمی را در مورد بخش‌پذیری بر ۲ (مثل این سؤال) ثابت کنیم از افراز اعداد صحیح به ۲ گروه استفاده می‌کنیم یعنی یک بار فرض می‌کنیم n زوج و بار دیگر n فرد باشد و در هر حالت نشان می‌دهیم که حکم ثابت می‌شود. (روش اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها)

برای هر سه عدد حقیقی x و y و z ثابت کنید: (۱/۵ نمره)

$$x^2 + 2/5y^2 + z^2 \geq 2xy - xz - yz$$

راهنمای تصحیح: دو طرف را در ۲ ضرب کرده و سعی می‌کنیم با استفاده از روابط دوطرفه به یک رابطه همواره درست برسیم:

$$x^2 + 2/5y^2 + z^2 \geq 2xy - xz - yz \Leftrightarrow 2x^2 + 5y^2 + 2z^2 \geq 4xy - 2xz - 2yz \quad (0/25)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 4xy + 2xz + 2yz \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{x^2} + \underline{x^2} + \underline{y^2} + \underline{4y^2} + \underline{z^2} + \underline{z^2} - \underline{4xy} + \underline{2xz} + \underline{2yz} \geq 0 \quad (0/25)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x-2y)^2}_{(0/25)} + \underbrace{(x+z)^2}_{(0/25)} + \underbrace{(y+z)^2}_{(0/25)} \geq 0$$

قرار دادن همه فلش‌های دوطرفه یا

جمله زیر نوشته شده باشد (۰/۲۵) تعلق گیرد.

«رابطه آخر همواره درست و همه مراحل برگشت پذیر هستند»

(صفحه ۷)

روش اثبات حکم p با گزاره‌های هم‌ارز (اثبات بازگشتی): سعی می‌کنیم با اعمال دوطرفه ضرب، تقسیم،

جمع و تفریق، ترکیب‌های درست دوشروطی $r \Leftrightarrow q \Leftrightarrow p$ بسازیم تا جایی که به یک رابطه همواره درست

برسیم. چون آخرین گزاره همواره درست و ترکیب‌های دوشروطی هم درست هستند پس همه گزاره‌ها هم‌ارزش بوده

و حکم p درست می‌شود. رابطه همواره درست که در آخر به دست می‌آید معمولاً به صورت $0 \geq 0$ یا

$0 \geq 0$ یا $0^2 + 0^2 + \Delta^2 \geq 0$ است.

درس‌Box

ثابت کنید اگر $a \mid b$ و $a \mid c$ آن گاه $a \mid 2b + c^2$. (۱ نمره)

۶

راهنمای تصحیح

$$a \mid b \Rightarrow \underbrace{aq = b}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow{\times 2} a(2q) = 2b \quad (۰/۲۵)$$

$$a \mid c \Rightarrow aq' = c \xrightarrow{\text{توان } 2} a(aq'^2) = c^2 \quad (۰/۲۵)$$

$$\underbrace{a(2q + aq'^2)}_{(۰/۲۵)} = 2b + c^2 \Rightarrow a \mid 2b + c^2$$

دو طرف را جمع می‌کنیم:

(صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

جمع‌بندی ویژگی‌های عادی کردن: اگر $a \mid b$ آن گاه b مضرب a و a مقسوم‌علیه b است.

درس‌Box

از رابطه $a \mid b$ چه نتایجی می‌توانیم بگیریم	
$\pm a \mid \pm b$	علامت مهم نیست.
$ka \mid kb$	دو طرف را در عدد صحیح دلخواه k ضرب کنیم.
$a^n \mid b^n$	دو طرف را به توان عدد طبیعی دلخواه n برسانیم.
$a \mid b^n$	فقط سمت راست را به توان عدد طبیعی n برسانیم.
$a \mid kb$	فقط سمت راست را در عدد صحیح k ضرب کنیم.
$ a \leq b $ (باید $b \neq 0$)	قدرمطلق سمت راست بزرگ‌تر یا مساوی قدرمطلق سمت چپ است.
به جای a می‌توانیم مقسوم‌علیه آن را قرار دهیم (a را لاغر کنیم).	

از دو رابطه $a \mid b$ و $a \mid c$ چه نتایجی می‌توانیم بگیریم	
$a \mid b \pm c$	سمت راست‌ها را با هم جمع و تفریق کنیم.
$a \mid mb \pm nc$	سمت راست‌ها را در عدد صحیح دلخواه ضرب کرده و بعد جمع و تفریق کنیم.

تذکر مهم: برای اثبات یک رابطه به صورت $a \mid b$ باید نشان دهیم عبارت صحیحی مثل q وجود دارد که $aq = b$. اثبات همه ویژگی‌های بالا به همین صورت انجام می‌شود.



a عددی فرد است و $5! \mid a + b$. باقی‌مانده تقسیم عدد $5 - 2b^2 + a^2$ را بر ۸ به دست آورید. (۱ نمره)

راهنمای تصحیح

۵! عددی زوج است و چون a فرد است پس $5! \mid a + b$ فرد است.

b مقسوم‌علیه عددی فرد است پس b فرد است. (۰/۲۵)

مربع هر عدد فرد به صورت $4k + 1$ است (۰/۲۵) پس داریم:

$$a^2 + 2b^2 - 5 = \underbrace{4k + 1 + 2(4k' + 1)}_{(۰/۲۵)} - 5 = 4(k + 2k') - 2$$

$$= 4q - 2 = 4q' + 6 \quad (۰/۲۵)$$

(صفحه ۱۶ - تمرین ۱۰)

باقی‌مانده تقسیم عدد $(1! + 2! + 3! + \dots + 99!)(1! + 2! + 3! + \dots + 50!)$ را بر ۲۴ به دست آورید. (۱ نمره)

راهنمای تصحیح

اگر $n \geq 4$ باشد، $n!$ بر $24 = 2 \times 2 \times 3 \times 4$ بخش پذیر است، پس $n! \equiv 0 \pmod{24}$ داریم:

$$(1! + 2! + 3! + \dots + 99!)(1! + 2! + 3! + \dots + 50!) \equiv (2 + 0)(1 + 2 + 6) + 0 = 18 \pmod{24}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{بر } 24 \text{ بخش پذیر (} 0/24 \text{)}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{بر } 24 \text{ بخش پذیر (} 0/24 \text{)}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{بر } 24 \text{ بخش پذیر (} 0/24 \text{)}}$

(صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

• هم‌نهشتی و ویژگی‌های آن

هم‌نهشتی: برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند x و r داریم:

$$m \mid x - r \Leftrightarrow x \equiv r \pmod{m} \Leftrightarrow x = mq + r \Leftrightarrow x \in [r]_m \quad 0 \leq r < m$$

ویژگی ۱: به دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی می‌توان عددی صحیح و یکسان را اضافه یا از آن کم کرد.
 ویژگی ۲: دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را می‌توان در عددی صحیح و یکسان ضرب کرد.
 ویژگی ۳: دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را می‌توان به توان n رساند. ($n \in \mathbb{N}$)
 ویژگی ۴: دو طرف دو رابطه هم‌نهشتی را که پیمانه‌های یکسان داشته باشند، می‌توان با هم جمع یا از هم منها و یا در هم ضرب کرد.

ویژگی ۵: می‌توان به دو طرف یا یک طرف یک رابطه هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.
 ویژگی ۶: اگر بخواهیم دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانه آن هم‌نهشتی را بر

$$a \equiv bc \pmod{m}, (c, m) = d \Rightarrow a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$$

ب.م.م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم.

نتیجه مهم: اگر $a \equiv bc \pmod{m}$ و $(c, m) = 1$ در این صورت $a \equiv b \pmod{m}$ (قاعده حذف در هم‌نهشتی‌ها، برای هر عدد که نسبت به پیمانه اول باشد، برقرار است).

$$a \equiv b \pmod{m}, a \equiv b \pmod{n}, (m, n) = 1 \rightarrow a \equiv b \pmod{mn}$$

ویژگی ۷:

پیدا کردن باقی‌مانده با هم‌نهشتی

برای به دست آوردن باقی‌مانده تقسیم a^n بر m داریم:

(۱) اگر a بزرگ باشد، به جای a یک هم‌نهشت مناسب (عددی که با a در پیمانه m هم‌نهشت باشد، حالا مثبت یا منفی) قرار می‌دهیم.

(۲) توانی از a پیدا می‌کنیم که هم‌نهشت ۱ یا -1 به پیمانه m باشد. (اگر نشد سعی می‌کنیم توانی از a که هم‌نهشت عددی کوچک به پیمانه m باشد، پیدا کنیم.)

(۳) با توان رساندن دو طرف و ضرب دو طرف در اعداد مناسب، a^n را می‌سازیم.

رقم یکان عدد $3a - 4$ با رقم یکان عدد $1 - 2^{75}$ برابر است. رقم یکان عدد a را به دست آورید. (۱/۵ نمره)

۱۰

راهنمای تصحیح >> رقم یکان هر عدد برابر با باقی مانده تقسیم آن عدد بر 10 است.

$$\underbrace{2^{75}}_{(0/25)} \xrightarrow{15 \text{ توان}} 2^{15} \equiv 2^{15} \pmod{10} \quad (0/25)$$

$$2^{15} = (2^5)^3 \equiv 2^3 = 8 \pmod{10} \quad (0/25)$$

پس رقم یکان عدد $1 - 2^{75}$ برابر 7 است. (۰/۲۵)

$$3a - 4 \equiv 7 \pmod{10} \Rightarrow \underbrace{3a \equiv 11 \pmod{10}}_{(0/25)} \xrightarrow{(3,10)=1} a \equiv 7 \pmod{10}$$

رقم یکان a برابر 7 است. (۰/۲۵)

اگر با هم نهشتی‌های درست دیگر نیز رقم یکان $1 - 2^{75}$ برابر 7 به دست آمده باشد، نمره تعلق گیرد.

(صفحه ۲۹ - تمرین ۱۰ و ۱۱)

باقی‌مانده تقسیم عدد $37a28$ بر ۹ برابر ۴ است. باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۱۱ را با استفاده از هم‌نهشتی به

دست آورید. (۱ نمره)

۱۱

راهنمای تصحیح: هر عدد، هم‌نهشت مجموع ارقام خودش به پیمانه ۹ است، پس داریم:

$$\overline{37a28}^9 \equiv 4 \Rightarrow \underbrace{3+7+a+2+8}_{(0/25)} \equiv 4 \Rightarrow a \equiv -7 \equiv 2 \quad (0/25)$$

از طرفی a یک رقم از صفر تا ۹ است پس $a = 2$ (۰/۲۵)

$$\overline{37228}^{11} \equiv 8 - 2 + 2 - 7 + 3 \equiv 4 \quad (0/25)$$

طبق قاعدهٔ بخش‌پذیری بر ۱۱ داریم:

(صفحه ۲۲ و ۲۳)

قواعد بخش‌پذیری بر اعداد خاص:

درس‌Box

پیمانه	قاعده	توضیح
۳ یا ۹	$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}^{3 \text{ یا } 9} \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_n$	باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۳ یا ۹، برابر باقی‌ماندهٔ تقسیم مجموع ارقامش بر ۳ یا ۹ است.
۵ یا ۱۰ یا ۲	$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}^{5 \text{ یا } 10 \text{ یا } 2} \equiv a_0$	باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۵ یا ۱۰ یا ۲، برابر باقی‌ماندهٔ تقسیم یکانش بر ۵ یا ۱۰ است.
۴ یا ۲۰ یا ۲۵ یا ۵۰	$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}^{4 \text{ یا } 20 \text{ یا } 25 \text{ یا } 50} \equiv a_1 a_0$	هر عدد، هم‌نهشت دو رقم آخر (یکان و دهگان) خود به پیمانهٔ ۴ یا ۲۰ یا ۲۵ یا ۵۰ است.
۱۱	$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}^{11} \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$	برای به دست آوردن باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۱۱، ارقام را از سمت راست یکی درمیان + و - گذاشته و جمع می‌کنیم.

۱۷ دی در یک سال دوشنبه است. ۲۰ تیر همان سال چندشنبه است؟ (۱ نمره)

راهنمای تصحیح

اول باید ببینیم از ۲۰ تیر ماه تا ۱۷ دی ماه چند روز فاصله است:

۱۷ دی $\longleftrightarrow$ ۲۰ تیر

$$(31-20) + 2 \times 31 + 3 \times 30 + 17 \quad (0/25)$$

دی پاییز مرداد و شهریور تا انتهای تیر

باقی مانده این عدد را بر ۷ به دست می آوریم:

$$(31-20) + 2 \times 31 + 3 \times 30 + 17 \equiv 4 + 2(3) + 3(2) + 3 \equiv 5 \quad (0/25)$$

۱۷ دی جلوتر از ۲۰ تیر است پس باید از دوشنبه ۵ روز به عقب برگردیم: (۰/۲۵)

چهارشنبه $\rightarrow$ پنجشنبه $\rightarrow$ جمعه $\rightarrow$ شنبه $\rightarrow$ یکشنبه $\rightarrow$ دوشنبه

۲۰ تیر چهارشنبه است. (۰/۲۵)

(صفحه ۲۴)

تقویم نگاری



فرض کنید روز هفته یک تاریخ داده شده باشد؛ می خواهیم ببینیم روز دیگری در سال چندشنبه است. برای این کار مراحل زیر را طی می کنیم:

(۱) اختلاف روزهای دو تاریخ را به دست می آوریم.

(۲) باقی مانده این عدد را بر ۷ پیدا می کنیم.

(۳) اگر به جلو بخواهیم حرکت کنیم، به اندازه باقی مانده از مبدأ جلو می رویم اما اگر به عقب بخواهیم حرکت کنیم به اندازه باقی مانده از مبدأ عقب می رویم.

مرحله ۳: آزمون نوبت اول | پایه دوازدهم ریاضی و فیزیک

معادله سیاله $11 = (7n+2)x + (3n-1)y$ جواب ندارد. همه اعداد صحیح n را مشخص کنید. (۷/۵ نمره)

۱۳

راهنمای تصحیح >>

معادله سیاله جواب ندارد هرگاه $(7n+2, 3n-1) \nmid 11$ (۷/۲۵)

ب.م.م دو عبارت $(7n+2, 3n-1)$ را برابر d فرض می‌کنیم:

$$\begin{aligned} d \mid 7n+2 &\xrightarrow{\times 3} d \mid 21n+6 \\ d \mid 3n-1 &\xrightarrow{\times (-7)} d \mid -21n+7 \end{aligned} \quad (7/25) \xrightarrow{\oplus} d \mid 13 \Rightarrow d=13 \text{ یا } d=1$$

اگر $d=13$ باشد، معادله جواب ندارد (۷/۲۵) پس:

$$13 \mid 3n-1 \quad (7/25) \Rightarrow 3n-1 \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow 3n \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 3n \equiv 1+2(13) = 27 \pmod{13}$$

$$\xrightarrow{+3} n \equiv 9 \pmod{13} \Rightarrow n = 13k + 9 \quad (7/25)$$

(صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

نکته >

- برای پیدا کردن ب.م.م دو عدد، معمولاً دو عدد را تجزیه می‌کنیم. ب.م.م برابر ضرب عامل‌های مشترک با توان کوچک‌تر می‌شود.
- برای پیدا کردن ب.م.م دو عدد پارامتری (برحسب n) معمولاً ب.م.م را برابر d می‌گیریم (مثل این سؤال) و از ویژگی‌های عاقل‌کردن استفاده می‌کنیم.

معادله هم‌نهشتی و روش حل آن

درس‌Box

به معادله $ax \equiv b \pmod{m}$ معادله هم‌نهشتی می‌گوییم. a و b ضرایب عددی و x مقدار مجهول است.

روش حل: برای حل معادله هم‌نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ مراحل زیر را طی می‌کنیم:

(۱) اگر a و b اعداد بزرگی هستند، به جایشان یک عدد هم‌نهشت با آن‌ها به پیمانه m را قرار می‌دهیم.

(۲) با اضافه کردن مضارب پیمانه به b کاری می‌کنیم تا دو طرف بر a بخش‌پذیر باشند.

(۳) با استفاده از ویژگی تقسیم، دو طرف را به a ساده می‌کنیم تا x به دست آید.

شرط جواب معادله هم‌نهشتی: $ax \equiv b \pmod{m}$ این است که $(a, m) \mid b$

نکته >

شرط جواب معادله سیاله $ax + by = c$ این است که $(a, b) \mid c$

شخصی در یک مسابقه پرتاب دارت، در هر پرتاب ۷ یا ۱۱ امتیاز و در مجموع ۱۹۱ امتیاز کسب کرده است.

حداکثر تعداد پرتاب‌های او چقدر بوده است؟ (۷/۵ نمره)

راهنمای تصحیح

تعداد پرتاب‌های ۷ و ۱۱ امتیازی را به ترتیب برابر x و y در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \underbrace{7x + 11y = 191}_{(0/25)} &\xrightarrow[\text{پیمانه}]{7} 11y \equiv 191 \xrightarrow[\text{پیمانه}]{11 \equiv 4} 4y \equiv 2 \\ &\xrightarrow[\text{پیمانه}]{\div 2} 2y \equiv 1 \equiv 8 \xrightarrow[\text{پیمانه}]{\div 2} y \equiv 4 \Rightarrow y = 7k + 4 \quad (0/25) \end{aligned}$$

y را در معادله جای گذاری می‌کنیم:

$$\underbrace{7x + 11(7k + 4) = 191}_{(0/25)} \Rightarrow x = \frac{-77}{7}k + \frac{147}{7} = -11k + 21 \quad (0/25)$$

y و x نمی‌توانند منفی باشند:

$$\begin{cases} x = -11k + 21 \geq 0 \\ y = 7k + 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow (x, y) = (21, 4) \Rightarrow x + y = 25 \\ k = 1 \Rightarrow (x, y) = (10, 11) \Rightarrow x + y = 21 \end{cases} \quad (0/25)$$

در حالت اول ۲۵ پرتاب و در حالت دوم ۲۱ پرتاب داشته است.

پس حداکثر ۲۵ پرتاب داشته است. (۷/۲۵) (صفحه ۲۶)

شخصی در یک مسابقه پرتاب دارت در هر پرتاب ۷ یا ۹ امتیاز و در مجموع ۱۸۳ امتیاز کسب کرده است.

حداکثر تعداد پرتاب‌های ۹ امتیازی او چقدر بوده است؟ (سوال ۷ دی ۱۴۰۳)

روشنی ۱

$$\begin{aligned} 7x + 9y = 183 &\Rightarrow 7x \equiv 183 \equiv 3 \quad (0/25) \xrightarrow{+18} 7x \equiv 21 \xrightarrow{\div 7} x \equiv 3 \quad (0/25) \\ \Rightarrow x = 9k + 3 \quad (0/25) &\Rightarrow 7(9k + 3) + 9y = 183 \quad (0/25) \Rightarrow y = 18 - 7k \quad (0/25) \\ k = 0 &\Rightarrow y = 18 \quad (0/25) \end{aligned}$$

حداکثر تعداد پرتاب‌های ۹ امتیازی

روشنی ۲

$$\begin{aligned} 7x + 9y = 183 &\Rightarrow 9y \equiv 183 \equiv 1 \quad (0/25) \xrightarrow{+25} 9y \equiv 26 \xrightarrow{\div 9} y \equiv 4 \quad (0/25) \\ \Rightarrow y = 7k + 4 \quad (0/25) &\Rightarrow 7x + 9(7k + 4) = 183 \quad (0/25) \Rightarrow x = 21 - 9k \quad (0/25) \\ k = 2 &\Rightarrow y = 18 \quad (0/25) \end{aligned}$$

حداکثر تعداد پرتاب‌های ۹ امتیازی

حل معادله سیاله خطی

تعریف: به معادله $ax + by = c$ که همه ضرایب و مجهولات عدد صحیح هستند، معادله سیاله خطی درجه اول می‌گوییم.

شرط جواب: شرط این که معادله $ax + by = c$ جواب داشته باشد این است که $c | (a, b)$ (و برعکس)
روش حل معادله سیاله: معادله سیاله را به معادله هم‌نهشتی تبدیل می‌کنیم. برای این کار دو طرف معادله را به پیمانه a می‌بریم، ax که مضرب a است، هم‌نهشت صفر می‌شود، پس داریم:

$$ax + by \equiv c \Rightarrow by \equiv c \pmod{a}$$

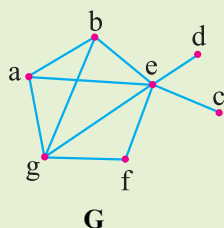
دقت کنید که می‌توانستیم به پیمانه b ببریم که در این صورت معادله به صورت $ax \equiv c \pmod{b}$ درمی‌آید.

مرحله ۳: آزمون نوبت اول | پایه دوازدهم ریاضی و فیزیک



- این که به کدامیک از پیمانه‌های b یا a ببریم فرقی نمی‌کند، اما معمولاً به پیمانه‌ای که کوچک‌تر (از نظر قدرمطلق) است ببریم، بهتر است.
- بعد از این که معادله هم‌نهشتی را حل و آن متغیر را پیدا کردید، باید آن را در معادله سیاله قرار دهید تا مجهول دیگر هم به دست آید.

با توجه به گراف مقابل به سؤالات زیر پاسخ دهید. (۱ نمره)



الف) مسیری به طول ۵ از رأس c به رأس f بنویسید.

ب) دوری به طول ۴ بنویسید.

پ) آیا گراف $\bar{G}$ همبند است؟ چرا؟

راهنمای تصحیح «الف) cebagf یا ceabgf (هر کدام نوشته شده باشد ۰/۲۵) (صفحه ۳۸)

ب) ebgfe یا eagfe یا ebage یا eabge یا ebgae (هر کدام نوشته شده باشد ۰/۲۵) (صفحه ۳۸)

پ) خیر (۰/۲۵) زیرا رأس e در گراف G دارای درجه $p-1$ است لذا درجه آن در گراف $\bar{G}$ صفر می‌باشد.

(صفحه ۳۹) $\deg_G(e) = p-1 = \Delta = 6 \Rightarrow \deg_{\bar{G}}(e) = 0 \Rightarrow \bar{G}$ ناهمبند است (۰/۲۵)

* در قسمت «پ» اگر گراف $\bar{G}$ رسم شده باشد و نتیجه‌گیری شده باشد که $\bar{G}$ ناهمبند است نمره کامل تعلق گیرد.



$$\deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v) = p-1$$

مجموع مرتبه و اندازه یک گراف کامل برابر ۵۵ است. اندازه این گراف را به دست آورید. (۱ نمره)

راهنمای تصحیح: اگر مرتبه گراف کامل برابر p باشد $q = \frac{p(p-1)}{2}$ (۰/۲۵) است.

$$p + \underbrace{\frac{p(p-1)}{2}}_{(۰/۲۵)} = ۵۵ \Rightarrow \frac{p^2 + p}{2} = ۵۵ \Rightarrow p(p+1) = ۱۱۰ \Rightarrow p = ۱۰ \text{ (۰/۲۵)}$$

اندازه گراف همان تعداد یال‌ها است که برابر است با: $\frac{۱۰ \times ۹}{2} = ۴۵$ (۰/۲۵)

(صفحه ۳۸)

درس Box

ویژگی‌ها	نماد	تعریف	نوع گراف
$pk = 2q$ (۱) $k \leq p-1$ (۲) (۳) از بین p و k حداقل یکی زوج است.	k - منتظم	درجه همه رأس‌ها برابر k است.	منتظم
$p-1 =$ درجه هر رأس (۱) $q = \frac{p(p-1)}{2}$ (۲) (۳) بیشترین تعداد یال ممکن در p رأس را دارد.	K_p	همه رأس‌ها به هم وصل هستند.	کامل p رأسی
$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{p(p-1)}{2}$ (۱) $\deg_G(a) + \deg_{\bar{G}}(a) = p-1$ (۲)	$\bar{G}$	رأس‌ها، همان‌ها هستند ولی یال‌هایی که در G به هم وصل نیستند این‌جا وصل می‌شوند.	مکمل G

۱۷

گراف G ، ۳ - منتظم از مرتبه ۱۰ است. (۱ نمره)

الف) $q(G)$ را به دست آورید.

ب) $q(\bar{G})$ را به دست آورید.

راهنمای تصحیح >> الف) در گراف k - منتظم مرتبه p داریم: $kp = 2q$ (۰/۲۵)

$$kp = 2q \Rightarrow 3 \times 10 = 2q \Rightarrow q = 15 \quad (۰/۲۵)$$

ب)

$$\overbrace{q(G) + q(\bar{G})}^{(۰/۲۵)} = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 15 + q(\bar{G}) = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

$$\Rightarrow q(\bar{G}) = 30 \quad (۰/۲۵)$$

(صفحه ۳۵)

هر یک از گراف‌های زیر را رسم کنید. (۱ نمره)

الف) K_4

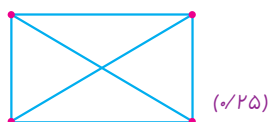
ب) P_5

پ) C_6

ت) $\overline{K_3}$

راهنمای تصحیح

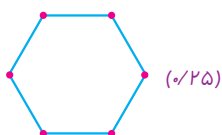
الف) گراف کامل ۴ رأسی که در آن همه رأس‌ها با هم مجاورند.



ب) مسیر ۵ رأسی



پ) دور ۶ رأسی



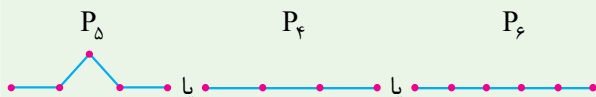
ت) مکمل گراف کامل ۳ رأسی (گراف تهی ۳ رأسی)



(صفحه‌های ۳۷ و ۳۸)

درس‌Box

تعریف مسیر n رأسی: گرافی که تنها از یک مسیر n رأسی تشکیل شده باشد را مسیر n رأسی گفته و با P_n نمایش می‌دهیم. مثلاً داریم:



تعریف دور n رأسی: گرافی که تنها از یک دور n رأسی تشکیل شده باشد را دور n رأسی گفته و با نماد C_n نمایش می‌دهیم. مثلاً:

