

نام و نام خانوادگی:

کلاس: دوازدهم

نام دبیر: آقای صدیقیان

رشته تحصیلی: ریاضی

شماره:

مدیریت آموزش و پرورش منطقه ۱۴

دبیرستان غیر دولتی پسرانه پیام غدیر

پایانی اول ۱۴۰۳ - ۱۴۰۲

تاریخ امتحان:

نام درس: ریاضیات گسسته

مدت امتحان: ۷۵ دقیقه

پاسخنامه

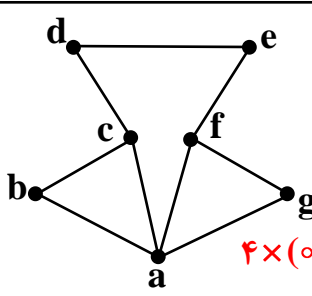
ساعت شروع امتحان: ۷ صبح

تعداد برگه سؤال: ۳ صفحه



بارم	پاسخ سؤالات را در درون جای مشخص شده، خوش خط و خوانا بنویسید.	ردیف
۱	<p>در هر قسمت زیر جاهای خالی را با عبارتی درست پر نمایید.</p> <p>الف) عدد $1 + 2^{2^n}$ به ازای $n = \dots ۵ \dots$ عددی مرکب است و بر ۶۴۱ بخش پذیر است. (۲۵ / ۰)</p> <p>ب) ضرب هر عدد گویای \dots غیر صفر \dots در عددی گنگ، عددی گنگ است. (۲۵ / ۰)</p> <p>پ) مربع هر عدد فرد، به شکل $\dots 1 + 4k \dots$ می باشد. (۲۵ / ۰)</p> <p>ت) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد \dots وسطی \dots می باشد. (۲۵ / ۰)</p>	۱
۱/۵	<p>ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$.</p> <p>حل: برای a دو حالت ممکن است رخ دهد:</p> <p>الف) اگر $a = 0$، در این حالت حکم برقرار است. (۲۵ / ۰)</p> <p>ب) اگر $a \neq 0$، در این حالت a^{-1} (معکوس a) یک عدد حقیقی است و با ضرب طرفین رابطه $ab = 0$ در a^{-1} داریم:</p> <p>بنابراین در هر دو حالت حکم برقرار است. (۵ / ۰)</p> <p>$ab = 0 \Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1} \times 0 \Rightarrow b = 0$ (۷۵ / ۰)</p>	۲
۱/۵	<p>اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha + 2\beta$ گنگ است.</p> <p>برهان خُلف: فرض خلف می گیریم که $\alpha + 2\beta$ گنگ نباشد، پس گویا است و تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است. داریم: $(\alpha + 2\beta) - (\alpha - \beta) = \beta \in \mathbb{Q}$ (۲۵ / ۰)</p> <p>که این با گنگ بودن β در تناقض است و بنابراین فرض خُلف باطل است و خود حکم صحیح است. (۵ / ۰)</p>	۳
۱/۵	<p>با استفاده از روش بازگشتی ثابت کنید برای هر سه عدد حقیقی داریم:</p> <p>$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$</p> <p>$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc \xrightarrow[\div 2]{\times 2} 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc \Leftrightarrow$ (۵ / ۰)</p> <p>$a^2 + b^2 - 2ab + a^2 + c^2 - 2ac + b^2 + c^2 - 2bc \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \geq 0$ (۵ / ۰)</p> <p>به عبارتی درست رسیدیم و کلیه مراحل برگشت پذیر است. (۵ / ۰)</p>	۴
«ادامه سؤالات در صفحه دوم»		

	« صفحه دوم »	
۱	<p>در هر قسمت عبارت درست را انتخاب کنید.</p> <p>الف) اگر $a b$ در این صورت (قطعاً $a \leq b$ است. - ممکن است $a \geq b$ باشد.) (۰/۲۵)</p> <p>ب) اگر $a b$ در این صورت ($[a, b] = a$ - $[a, b] = b$) (۰/۲۵)</p> <p>پ) معادله هم‌نهشتی $bx \equiv c \pmod{m}$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(c, m) b$ - $(b, m) c$ (۰/۲۵)</p> <p>ت) عدد 1402 به دسته هم‌نهشتی $([11]_{13} - [1]_{13})$ به پیمانه 13 قرار دارد. (۰/۲۵)</p>	۵
۱/۵	<p>اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد a و b بر 23 به ترتیب 17 و 13 باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد $2a - 3b$ بر 23 را بیابید.</p> $\begin{cases} a = 23q + 17 \xrightarrow{\times 2} 2a = 46q + 34 \\ b = 23q' + 13 \xrightarrow{\times 3} 3b = 69q' + 39 \end{cases} \xrightarrow{-} 2a - 3b = 23(2q - 3q') - 5 + 23 - 23 \quad (0/5)$ $2a - 3b = 23(2q - 3q' - 1) + 18 \quad (0/5)$ <p>باقی‌مانده برابر 18 است. (۰/۵)</p>	۶
۱/۵	<p>اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه، هر دو بر عدد 17 بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌مانده تقسیم نیز همواره بر 17 بخش‌پذیر است.</p> $a = bq + r \xrightarrow{\substack{a=17k \\ b=17k'}} 17k = 17k'q + r \Rightarrow r = 17(k - k'q) \Rightarrow \boxed{r = 17k''} \quad (0/5)$	۷
۱/۵	<p>باقی‌مانده تقسیم عدد 2023^{1402} بر 43 را بیابید.</p> $2023 \equiv 2 \pmod{43} \xrightarrow{(\cdot)^7} 2023^7 \equiv 128 \equiv -1 \pmod{43} \xrightarrow{(\cdot)^{200}} 2023^{1400} \equiv 1 \pmod{43} \quad (1) \quad (0/5)$ $2023 \equiv 2 \pmod{43} \xrightarrow{(\cdot)^2} 2023^2 \equiv 4 \pmod{43} \quad (2)$ $(1) \times (2) \rightarrow \boxed{2023^{1402} \equiv 4 \pmod{43}} \quad (0/5)$	۸
۱/۵	<p>اگر 14 خرداد ماه چهارشنبه باشد، 22 بهمن همان سال چه روزی از هفته است؟</p> <p>چهارشنبه (۰) ، پنجشنبه (۱) و و سه‌شنبه (۶) (۰/۵)</p> $17 + 3(31) + 4(30) + 22 = 252 \equiv 0 \pmod{7} \quad (0/75)$ <p>پس 22 بهمن چهارشنبه است. (۰/۲۵)</p>	۹
	«ادامه سؤالات در صفحه سوم»	

		« صفحه سوم »	
۱	اثبات ویژگی « دو طرف یک رابطه هم‌نهستی را می‌توان در عددی صحیح ضرب کرد.» را در زیر کامل کنید.	$a \equiv b \xrightarrow{m} m a - b \xrightarrow{m} m c \times (a - b) \xrightarrow{m} m ac - bc \xrightarrow{m} ac \equiv bc$ <p style="text-align: center;">(۰/۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)</p>	۱۰
۱/۵	جواب‌های کلی معادله سیاله $37x + 11y = 10$ را بدست آورید.	$(37, 11) = 1 10 \quad (0/25)$ $37x + 11y = 10 \Rightarrow 37x \equiv 10 \Rightarrow 4x \equiv 32 \Rightarrow x \equiv 8 \Rightarrow \boxed{x = 11k + 8} \quad (0/5)$ $37x + 11y = 10 \xrightarrow{x=11k+8} 11y = -37(11k + 8) + 10 \Rightarrow \boxed{y = -37k + 26} \quad (0/75)$	۱۱
۱	الف) یالی که که یک رأس را به خود آن رأس وصل نماید، یال موازی نامیده می‌شود. (درست - نادرست) (۰/۲۵) ب) تعداد رئوس زوج هر گراف، همواره عددی زوج است. (درست - نادرست) (۰/۲۵) پ) هر گرافی، زیر گراف خودش می‌باشد. (درست - نادرست) (۰/۲۵) ت) گراف C_n ، تنها یک دور n رأسی دارد. (درست - نادرست) (۰/۲۵)		۱۲
۳	گراف G مقابل را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید. الف) جاهای خالی را با اعداد درست کامل کنید. $p = 70, q = 90, \Delta = 40, \delta = 20$ $4 \times (0/25)$ ب) ۲ مسیر به طول‌های ۲ و ۴ از a به d بنویسید: $acdf$ و $agfed$ $4 \times (0/25)$ پ) ۲ دور به طول‌های ۵ و ۷ بنویسید: $acdefa$ و $abcdefga$ $2 \times (0/25)$ ت) مجموعه‌های خواسته شده را بنویسید: $N_G(f) = \{g, e, a\}, N_G[b] = \{b, c, a\}$ $2 \times (0/25)$ ث) مکمل این گراف چند یال دارد؟ $q_{\bar{G}} = \binom{7}{2} - 9 = 12$ (۰/۵)		۱۳
۱	الف) اندازه گراف کامل ۸ رأسی چقدر است؟ $q_{K_8} = \binom{8}{2} = 28 \quad (0/25)$ ب) با حذف چند یال از گراف کامل ۸ رأسی، این گراف تبدیل به گرافی ۳-منتظم از مرتبه ۸ می‌شود؟ $pr = 2q \longrightarrow 8 \times 3 = 2q \longrightarrow \boxed{q = 12} \quad (0/75)$ $28 - 12 = 16$		۱۴
۲۰	« موفق باشید »		