«پاسخنامه حسابان دی ۴۰۲»

۱/الف

$۱۲, ۱۶, \dots, ۴۸$ ✓

$t_n = t_1 + (n-1)d \rightarrow ۴۸ = ۱۲ + ۴(n-1)$

$\rightarrow n-1 = \frac{۳۶}{۴} = ۹ \rightarrow n = ۱۰$ ✓

$S_{۱۰} = \frac{۱۰}{۲}(۱۲ + ۴۸) = ۳۰۰$ ✓ ①

$S_n = n/۲\,(t_1 + t_n)$

۱/ب

$S_n = \frac{t_1(q^n - 1)}{q-1}$ ✓

$\frac{S_{۱۰}}{S_۵} = \frac{q^{۱۰}-1}{q^۵-1} = \frac{(q^۵-1)(q^۵+1)}{q^۵-1} = q^۵+1$

$\rightarrow \frac{S_{۱۰}}{S_۵} = ۲^۵ + 1 = ۳۳$ ✓ (۰٫۷۵)

۲/الف)

$f(x) = |x-۲| + |x+۳|$ تابع ناودانی

$Min(f) = f(۲) = f(-۳) = ۱$ (۰٫۵)

۲/ب)

$(x/۲ - 1)^۲ - ۷(x/۲ - 1) + ۶ = ۰$

$\xrightarrow{x/۲ - 1 = t} t^۲ - ۷t + ۶ = ۰ \rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = ۶ \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} \frac{x}{۲} - 1 = 1 \rightarrow x' = ۴ \\ \frac{x}{۲} - 1 = ۶ \rightarrow x'' = ۱۴ \end{cases} \rightarrow S = ۱۸$ (۰٫۷۵)

۲/ج)

$-1 < x < ۰ \rightarrow [x] = -1$

$-1 < x < ۰ \rightarrow ۰ < x^۲ < 1 \rightarrow [x^۲] = ۰$

$\Rightarrow [x] + [x^۲] = -1$ (۰٫۵)

۲/د)

و تابعی از x نیست زیرا ......

$if\ x = ۲ \rightarrow ۲ = \sqrt{|y|} + 1 \Rightarrow \sqrt{|y|} = 1$

$\rightarrow |y| = 1 \rightarrow y = \pm 1$ (۰٫۵)

۲/ه)

$f(۳) = ۲$

$f(۳) = a^۲ - a \rightarrow a^۲ - a = ۲ \rightarrow a^۲ - a - ۲ = ۰$

$\rightarrow \begin{cases} a = -1 & \text{غ ق ق} \rightarrow \text{نقض تابع} \\ \boxed{a = ۲} \end{cases}$

$\begin{rcases} f(b) = ۲ \\ f(۳) = ۲ \end{rcases} \rightarrow \boxed{b = ۳} \rightarrow (a, b) = (۲, ۳)$ (۰٫۵)

۲/و)

$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = -1 + ۴ = ۳$ (۰٫۲۵)

۲/ز)

$f(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(۳) = ?$

$\rightarrow ۳ = \frac{x}{x-1} \rightarrow ۳x - ۳ = x$

$\rightarrow ۲x = ۳ \rightarrow \boxed{x = ۳/۲}$ (۰٫۵)

۳/الف)

$D = \mathbb{R} - \{۴\}$

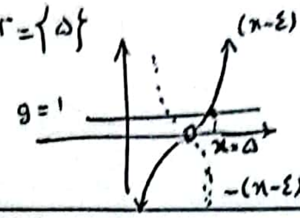
$if\ x > ۴ \rightarrow \frac{1}{x-۴} = x - ۴ \rightarrow (x-۴)^۲ = 1$ ✓

$\xrightarrow{\sqrt{}} x - ۴ = 1 \rightarrow \boxed{x = ۵}$ ✓

$if\ x < ۴ \rightarrow \frac{1}{x-۴} = -(x-۴) \rightarrow (x-۴)^۲ = -1$ نشدنی

ج ر $= \{۵\}$ ①

روش دوم)



۳/ب

$\sqrt{۲x+۲} - \sqrt{x-1} = ۲$

$\begin{rcases} D_1 : x \geq -1 \\ D_۲ : x \geq 1 \end{rcases} \xrightarrow{\cap} D_{\text{کل}} = [1, +\infty)$ ✓

$\rightarrow \sqrt{۲x+۲} = \sqrt{x-1} + ۲$ ✓

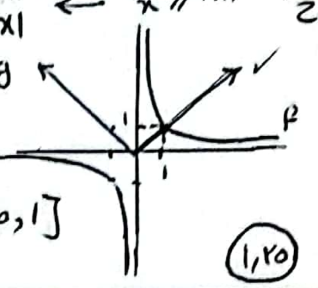
$\xrightarrow[\text{دو}]{\text{توان}} ۲x + ۲ = x - 1 + ۴ + ۴\sqrt{x-1}$ ✓

$\rightarrow x - 1 = ۴\sqrt{x-1} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = ۰ \rightarrow x = 1 \\ \sqrt{x-1} = ۴ \Rightarrow x = ۱۷ \end{cases}$

ج ر $= \{1, ۱۷\}$ ✓ (۱٫۲۵)

۳/ج.

$\frac{1}{x} \geq |x| \rightarrow \begin{cases} f(x) = 1/x \\ g(x) = |x| \end{cases}$



ج ر: $x \in (۰, 1]$ (۱٫۲۵)

---

۴)

$۳x^۲ + ۲ax - b = ۰ \rightarrow f(-1) = ۰$

$\rightarrow ۳ - ۲a - b = ۰ \rightarrow \boxed{۲a + b = ۳}$

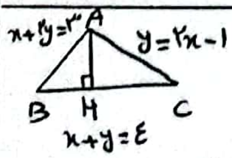
$S = ۲P \rightarrow ۲(-\frac{b}{۳}) = \frac{-۲a}{۳} \rightarrow \boxed{b = a}$

$\rightarrow ۲a + a = ۳ \rightarrow \boxed{a = 1 = b}$

$\rightarrow a + b = ۲$ (۱٫۲۵)

---

۵)



$\begin{cases} x + ۲y = ۳ \\ y = ۲x - 1 \end{cases}$

$\rightarrow x + ۴x - ۲ = ۳ \rightarrow \boxed{x = 1}\ \boxed{y = 1}$

$A = (1, 1)$ $AH = \frac{|1 + 1 - ۴|}{\sqrt{1^۲ + 1^۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$ ✓ (۱٫۵)

---

۶)

$A(-a, ۲a+1)$ $B = (۲, ۳)$

$AB\ \text{وسط}\ O \rightarrow \begin{cases} x_O = \frac{-a+۲}{۲} \\ y_O = \frac{۲a+۴}{۲} \end{cases} \xrightarrow[\text{نیمساز دوم}]{y = -x}$ (۱٫۲۵)

$a + ۲ = \frac{a-۲}{۲} \xrightarrow{×۲} ۲a + ۴ = a - ۲ \rightarrow a = -۶$

۷/الف

$f(x) = \sqrt{x(x-1)}$ $g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-1}$

D_f: $+\ \ -\ \ +$ $\quad x \in (-\infty, ۰] \cup [1, +\infty)$

$D_g : \begin{rcases} x \geq ۰ \\ x \geq 1 \end{rcases} \xrightarrow{\cap} x \geq 1 = [1, +\infty)$

چون $D_f \neq D_g$ پس دو تابع مساوی نیستند ①

۷/ب

$x \rightarrow \boxed{f(x) = ۴^x} \rightarrow \boxed{g(x) = ۲x - 1} \rightarrow ۳$

$۲x - 1 = ۳ \rightarrow x = ۲ \Rightarrow ۴^x = ۲ \rightarrow ۲^{۲x} = ۲^1$ ✓

$\rightarrow ۲x = 1 \rightarrow x = 1/۲$ ✓ (۰٫۷۵)

۸

$f(x) = \sqrt{x-۲} + 1 \rightarrow \begin{cases} D_f = x \geq ۲ \\ R_f = y \geq 1 \end{cases}$

$f(x) = f(x') \rightarrow x = x'$: شرط 1-1

$\sqrt{x-۲} + 1 = \sqrt{x'-۲} + 1 \xrightarrow[\text{توان}]{-1} x - ۲ = x' - ۲ \xrightarrow{+۲} x = x'$

پس یک به یک است (۰٫۵)

روش دوم: نمودار تابع به ازاء خطوط افقی [illegible] فقط در یک نقطه قطع می‌شود.

$y = \sqrt{x-۲} + 1 \xrightarrow{-1} (y - 1) = \sqrt{x-۲}$

$\xrightarrow[\text{دو}]{\text{توان}} x - ۲ = (y-1)^۲ \rightarrow x = (y-1)^۲ + ۲$

$\rightarrow f^{-1}(x) = (x-1)^۲ + ۲ \quad (x \geq 1)$ (۰٫۵)

۹/الف

$f(x) = \sqrt{۳ - x} \rightarrow D_f : x \leq ۳$

$g(x) = \frac{x+۲}{x+1} \rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x | g = ۰\} = (-\infty, ۳] - \{-1, -۲\}$

$D_{fog} = \{x \in D_g | g \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} - \{-1\} | \frac{x+۲}{x+1} \leq ۳\}$

$\xrightarrow{-۳} -\frac{۲x-1}{x+1} \leq ۰$ $\quad$ $-1 \quad -1/۲$ $\quad - \ \| \ + \ : \ -$ (۱٫۲۵)

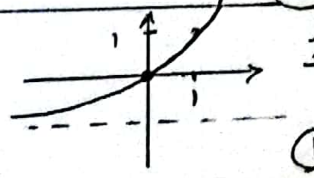
$D_{fog} = (-\infty, -1) \cup [-1/۲, +\infty)$

ب) $(fog)(x) = f(\frac{x+۲}{x+1}) = \sqrt{۳ - \frac{x+۲}{x+1}} = \sqrt{\frac{۲x+1}{x+1}}$ (۰٫۵)

۱۰/الف

$y = ۲^x - 1$

x	y
۰	۰
1	1



$R_g = (1, +\infty)$ ✓ ①

۱۰/ب

$f(x) = [x/۳]$ $-۳ \leq x \leq ۳ \xrightarrow{÷۳} -1 \leq \frac{x}{۳} \leq 1$

$-1 \leq \frac{x}{۳} < ۰ \rightarrow f(x) = -1 \xrightarrow{×۳} -۳ \leq x < ۰$

$۰ \leq x/۳ < 1 \rightarrow f(x) = ۰ \xrightarrow{×۳} ۰ \leq x < ۳$ (۱٫۲۵)

$f(۳) = [\frac{۳}{۳}] = 1$