-۱

الف) استدلال استقرایی

ب) استدلال تمثیلی

پ) استدلال استقرایی

ت) استدلال شهودی

ث) استدلال استقرایی

ج) استدلال استقرایی

-۲

الف:

ب: گویا مثال نقض $: x=\sqrt{۲}\,,\ y=۰ \Rightarrow xy=۰\times\sqrt{۲}=۰$

پ: مثال نقض $: ۲\times ۰=۰\ ,\ ۲\neq ۰$

-۳

(۱) حکم مسئله $۱^۳+۲^۳+۳^۳+\ldots+n^۳=\left[\frac{n(n+۱)}{۲}\right]^۲$

فرض برای $n=k$ برقرار باشد: $۱^۳+۲^۳+۳^۳+\ldots+k^۳=\left[\frac{k(k+۱)}{۲}\right]^۲$ باید ثابت کنیم برای $n=k+۱$ نیز برقرار است یعنی ثابت کنیم:

برای اثبات کافی است طرفین حکم استقرا را منهای طرفین حکم مسئله کنیم.

$$(n+۱)^۳=\left[\frac{(n+۱)(n+۱)}{۲}\right]^۲-\left[\frac{n(n+۱)}{۲}\right]^۲=\frac{(n+۱)^۲(n+۲)^۲}{۴}-\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$$

در نتیجه:

$$(n+۱)^۳=\frac{(n+۱)^۲(\cancel{n^۲}+۴n+۴-\cancel{n^۲})}{۴}=\frac{۴(n+۱)^۲(n+۱)}{۴}=(n+۱)^۳$$ که برقرار است

۴- در تصاعد عددی با تعداد جملات فرد، جمله وسط میانگین جملات است بنابراین برای این تصاعد داریم:

$$\begin{cases} a_۳ - ۲d\ ,\ a_۳ - d\ ,\ a_۳\ ,\ a_۳ + d\ ,\ a_۳ + ۲d & (I) \\ ۵a_۳ = ۶۰ \Rightarrow a_۳ = \frac{۶۰}{۵} = ۱۲ & (II) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(I)\ \text{و}\ (II)} \underbrace{۱۲ - ۲d\ ,\ ۱۲ - d\ ,\ ۱۲}_{\text{سه جمله کوچک تر}}\ ,\ \underbrace{۱۲ + d\ ,\ ۱۲ + ۲d}_{\text{دو جمله بزرگ تر}}$$

$$\Rightarrow ۲۴ + ۳d = ۳\,(۳۶ - ۳d) \Rightarrow ۱۲d = ۸۴ \Rightarrow d = ۷$$

۵- می‌دانیم مجموع بی‌شمار جمله در یک دنباله‌ی هندسی (حد مجموع) از رابطه‌ی $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a_۱}{۱ - r}$ به دست می‌آید

که r قدرنسبت است. بنابراین:

$$۹\ ,\ ۶\ ,\ ۴\ ,\ \ldots \Rightarrow r = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{۹}{۱ - \frac{۲}{۳}} = \frac{۹}{\frac{۱}{۳}} = ۲۷$$

۶- حقوق روز اول $a_۱ = ۷۵۰$ تومان و هر هفته ۲۵ واحد اضافه شود $(d = ۲۵)$ باید به ۲۰۰۰ واحد پول برسد $(a_n = ۲۰۰۰)$ مقدار n مورد سؤال است.

$$a_n = a_۱ + (n - ۱)d \Rightarrow ۲۰۰۰ = ۷۵۰ + (n - ۱) \times ۲۵ \Rightarrow ۲۰۰۰ - ۷۵۰ = ۲۵n - ۲۵$$

$$\Rightarrow ۱۲۵۰ + ۲۵ = ۲۵n \Rightarrow ۱۲۷۵ = ۲۵n \Rightarrow n = \frac{۱۲۷۵}{۲۵} = ۵۱$$

-۷

$$a_۱ + a_۲ = ۸۱$$
$$a_۵ + a_۶ = ۱۶ \quad \to (a_۳ + a_۴)^۲ = (a_۱ + a_۲)(a_۵ + a_۶)$$
$$a_۳ + a_۴ = \sqrt{۸۱ \times ۱۶} = ۹ \times ۴ = ۳۶$$
$$\to S_۶ = ۸۱ + ۳۶ + ۱۶ = ۱۳۳$$

۸- جمله‌ی عمومی در دنباله‌ی مثلثی برابر است با: $t_n = \frac{n(n + ۱)}{۲}$

بنابراین جملات دهم و یازدهم برابر است با:

$$t_{۱۰} = \frac{۱۰\,(۱۰ + ۱)}{۲} = \frac{۱۰ \times ۱۱}{۲} = ۵۵$$

$$t_{۱۱} = \frac{۱۱\,(۱۱ + ۱)}{۲} = \frac{۱۱ \times ۱۲}{۲} = ۶۶$$

روش دوم: در دنباله‌ی مثلثی مجموع هر دو جمله‌ی متوالی جملات دنباله‌ی مربعی را تشکیل می‌دهد.

$$t_n + t_{n+۱} = (n + ۱)^۲ \Rightarrow t_{۱۰} + t_{۱۱} = (۱۰ + ۱)^۲ = ۱۱^۲ = ۱۲۱$$

۹- با توجه به فرمول جمع جملات دنباله‌ی فیبوناتچی داریم:

$$S_n = ۲F_n + F_{n-۱} - ۱ = ۲(۶۱۰) + ۳۷۷ - ۱ = ۱۵۹۶$$

-۱۰

تعداد صفرهای توپر

تعداد صفرهای توخالی :۰ ۲ ۴ ۸ ۱۲

مجموع این آرایه ها (صفرها) برابر است با: ۱: , ۴ , ۹ , ۱۶ , ۲۵,....

که یک آرایه‌ی مربعی است که جمله‌ی یازدهم برابر است با $۱۲۱ = ۱۱^۲$ و تعداد صفرهای توپر یکی بیش‌تر از تعداد صفرهای توخالی است پس تعداد صفرهای توخالی یازدهم ۶۰ و تعداد صفرهای توپر ۶۱ می‌باشد

-۱۱

$$\mathrm{Log}\,۳۵ + ۲\mathrm{Log}\,۲\sqrt{۷} - \mathrm{Log}\,۲۰۰ - ۲\mathrm{Log}\,۷ = \mathrm{Log}\,۳۵ + \mathrm{Log}\left(۲\sqrt{۷}\right)^۲ - \mathrm{Log}\,۲۰۰ - \mathrm{Log}\,۷^۲$$

$$= \mathrm{Log}\,۳۵ + \mathrm{Log}\,۲۸ - \mathrm{Log}\,۲۰۰ - \mathrm{Log}\,۴۹ = \mathrm{Log}\frac{۳۵ \times ۲۸}{۲۰۰ \times ۴۹} = \mathrm{Log}\frac{۱}{۱۰} = \mathrm{Log}\,۱۰^{-۱} = -\mathrm{Log}\,۱۰ = -۱$$

-۱۲

$$\mathrm{Log}\left(x^۲ - ۹\right) = \mathrm{Log}(x+۳) + \mathrm{Log}\,۳^۲$$

$$\mathrm{Log}\left(x^۲ - ۹\right) = \mathrm{Log}\,۹(x+۳) \Rightarrow x^۲ - ۹ = ۹x + ۲۷ \Rightarrow x^۲ - ۹x - ۳۶ = ۰ \Rightarrow (x-۱۲)(x+۳) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۱۲ \\ x = -۳ \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

-۱۳

$$\mathrm{Log}(x+۱) + \mathrm{Log}(x-۱) = \frac{۱}{۳}\mathrm{Log}\,۱۲۵ - ۲\,\mathrm{Log}\,۲$$

$$\Rightarrow \mathrm{Log}\,x^۲ - ۱ = \mathrm{Log}\frac{\sqrt[۳]{۱۲۵}}{۲^۲} \Rightarrow x^۲ - ۱ = \frac{۵}{۴} \Rightarrow x^۲ = \frac{۹}{۴} \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{۳}{۲} \\ \frac{-۳}{۲} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

-۱۴ ....

-۱۵

$$D = ۱۰\,\mathrm{Log}\frac{L}{L_۰} = ۱۰\,\mathrm{Log}\frac{۳/۶ \times \cancel{۱۰^{-۹}}}{\cancel{۱۰^{-۱۲}}}$$

$$D = ۱۰\left(\mathrm{Log}\,۳/۶ \times ۱۰^۳\right) \Rightarrow D = ۱۰\left(\mathrm{Log}\frac{۳۶}{۱۰} + \mathrm{Log}\,۱۰^۳\right)$$

$$\Rightarrow D = ۱۰(\mathrm{Log}\,۳۶ - \mathrm{Log}\,۱۰ + ۳\mathrm{Log}\,۱۰)$$

در این‌جا از $\mathrm{Log}\,۳۶ = ۱/۵۶$ طبق صورت سؤال استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow D = ۱۰(۱/۵۶ - ۱ + ۳) = ۱۰ \times (۳/۵۶) = ۳۵/۶$$