نام دبیر: آقای امام

تاریخ امتحان: هندسه ۲ (۹۶/۱۰/۷)

رشته تحصیلی: ریاضی

ساعت شروع امتحان: ۸:۳۰ صبح

مدیریت آموزش و پرورش منطقه ۱۴

دبیرستان غیر دولتی پسرانه پیام غدیر

پایانی اول ۹۷-۹۶

پاسخ نامه درس: هندسه ۲

یازدهم ریاضی

سؤال ۱

الف) اگر و تنها اگر – عمود ب) واسطه هندسی ج) مماس درون د) دو

هـ) عمود – موازی هر قسمت ۰/۲۵ نمره

سؤال ۲

الف) کمان دایره شامل دو نقطه روی دایره و تمام نقاط بین آن دو نقطه است (صفحه ۱۲ کتاب درسی قسمت ۶)

ب) زاویه ظلی زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن مماس بر دایره و ضلع دیگر آن شامل وتری از دایره باشد (صفحه ۱۴ کتاب درسی)

ج) تابعی است که به هر نقطه A از صفحه P، دقیقاً یک نقطه مانند A' را از صفحه P نظیر کند و برعکس. (صفحه ۳۶ کتاب درسی)

د) در هر تبدیل، نقطه‌ای را که تبدیل یافته‌ی آن بر خود آن نقطه منطبق می‌شود، نقطه ثابت تبدیل می‌نامند (صفحه ۳۸ کتاب درسی) هر قسمت ۰/۵ نمره

سؤال ۳

$$S_{\text{قطاع}\ OAB} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} = \frac{\pi \times 4^2 \times 60}{360} = \frac{8\pi}{3} \quad (*)$$ ۰/۷۵ نمره

$OA = OB = R \rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \frac{120}{2} = 60 \rightarrow O\overset{\triangle}{A}B$: متساوی‌الاضلاع

$$S_{O\overset{\triangle}{A}B} = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3} \quad (**)$$ ۰/۵ نمره

$$\rightarrow S_{\text{قطعه}} = S_{\text{قطاع}} - S_{O\overset{\triangle}{A}B} \xrightarrow[**]{*} S_{\text{قطعه}} = \frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3}$$ ۰/۲۵ نمره

سؤال ۴

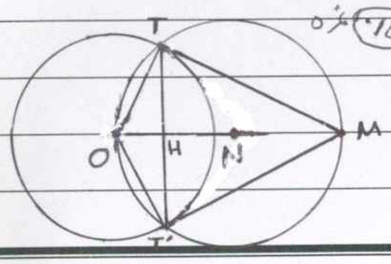
الف) ۱- نقطه M را به نقطه O مرکز دایره وصل می‌کنیم.

مراحل ۰/۷۵ نمره

۲- به مرکز وسط پاره‌خط OM (نقطه N) و شعاع $ON = MN$ دایره‌ای رسم می‌کنیم و محل تقاطع این دایره را با دایره C نقاط T و T' می‌نامیم.

۳- از نقطه‌ی M به نقاط T و T' وصل می‌کنیم، پاره‌خط‌های MT و MT' مماس‌های رسم شده بر دایره‌اند.

شکل ۰/۲۵ نمره



دلیل: $\hat{OTM} =$ زاویه محاطی روبه‌رو به کمان $\overset{\frown}{OM}$ $= \frac{\overset{\frown}{OM}}{2} = \frac{180}{2} = 90°$ ۰/۲۵ نمره

صفحه ۱

ادامه سوال ۴-ج)

OTM در مثلث $(\hat{T}=90^\circ) \Rightarrow OM^2 = OT^2 + MT^2 \rightarrow MT = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$ ۰/۲۵ نمره

$$\left.\begin{array}{l} OT = OT' = R \\ OM = OM \\ \hat{T} = \hat{T}' = 90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{تکه}]{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\triangle}{OTM} = \overset{\triangle}{OT'M} \rightarrow T\hat{O}M = T'\hat{O}M$$

$$\left.\begin{array}{l} T\hat{O}M = T'\hat{O}M \\ \text{از طرفی} \begin{cases} OT = OT' = R \\ OH = OH \end{cases} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{OTM} \cong \overset{\triangle}{OT'M} \rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$$

و $TH = T'H$

در مثلث قائم‌الزاویه OTM ارتفاع وارد بر وتر TH $\Rightarrow OT^2 = OH \cdot OM \rightarrow 2^2 = OH \times 5 \rightarrow OH = \frac{4}{5}$

در مثلث قائم‌الزاویه OTH $\Rightarrow OT^2 = OH^2 + TH^2 \rightarrow 2^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + TH^2 \rightarrow TH = \sqrt{4 - \frac{16}{25}}$

$\rightarrow TH = \sqrt{\frac{100}{25} - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{84}{25}} = \frac{2\sqrt{21}}{5} \rightarrow TT' = 2TH = \frac{4\sqrt{21}}{5}$ ۰/۲۵ نمره

سوال ۵) الف) $\hat{N} = \frac{\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{AC}}{2} \rightarrow 120 = \frac{\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{AC}}{2} \rightarrow \overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{AC} = 240^\circ$ ۰/۲۵

$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC}}{2} \rightarrow 70 = \frac{\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC}}{2} \rightarrow \overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC} = 140$ ۰/۲۵

$\rightarrow \begin{cases} x + y = 240 \\ x - y = 140 \end{cases}$ ۰/۲۵

$2x = 380 \rightarrow x = 190 \Rightarrow 190 + y = 240 \rightarrow y = 240 - 190 = 50$

ب) $MT^2 = MA \cdot MB \rightarrow 6^2 = 5 \times (MA + AB) \rightarrow 36 = 5(5 + 2y)$ ۰/۲۵

$\rightarrow 36 = 25 + 10y \rightarrow 10y = 11 \rightarrow y = 1.1$

$NA \cdot NB = ND \cdot NC \rightarrow y \cdot y = x \times 2 \rightarrow (1.1)^2 = 2x \rightarrow 2x = 1.21$

$\rightarrow x = \frac{1.21}{2} \simeq 0.6$ ۰/۲۵

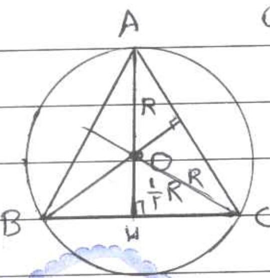
سوال ۶) شعاع دایره بزرگتر را R و شعاع دایره کوچکتر را r می‌نامیم ضمناً چون قطر MB بر وتر NN' عمود است پس آن را نصف می‌کند یعنی NO=N'O حال می‌توان رابطه زیر را نوشت:

$MO \cdot BO = NO \cdot N'O \rightarrow (AO - AM) \cdot BO = (DO - ND)(DO - ND)$

$\rightarrow (R - 16)R = (R - 10)(R - 10) \rightarrow \cancel{R^2} - 16R = \cancel{R^2} - 20R + 100$

$\rightarrow 4R = 100 \rightarrow \boxed{R = 25}$ ۰/۲۵ نمره

$MB = AB - AM \rightarrow MB = 2R - AM = 50 - 16 = 34 \rightarrow r = \frac{MB}{2} = \frac{34}{2} = 17$ ۰/۲۵ نمره



سؤال ۷) راه اول: همانطور که می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع‌ها، میانه‌ها نیز به شمار می‌آیند و میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کنند. همچنین میانه‌ها نیز همان عمودمنصف‌ها هستند و محل همرسی عمودمنصف‌ها مرکز دایره محیطی مثلث است. لذا خواهیم داشت:

(*) $h = \frac{3}{2}R$: ارتفاع مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$

$$\overset{\triangle}{OHC}: OC^2 = OH^2 + HC^2 \to HC = \sqrt{OC^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - (\tfrac{1}{2}R)^2}$$

$$\to HC = \sqrt{R^2 - \tfrac{1}{4}R^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}R \to BC = 2HC = \sqrt{3}R \quad (**)$$

از روابط (*) و (**): $S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2}h\cdot BC = \frac{1}{2}\times\frac{3}{2}R\times\sqrt{3}R = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$ (۱/۵)

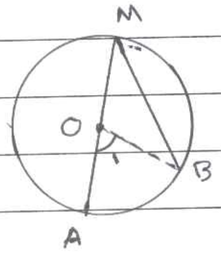
راه دوم: روابط‌های $S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ (مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع) و $R = \frac{abc}{4S}$ (شعاع دایره محیطی) را می‌دانیم لذا خواهیم داشت:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{a^3}{4S} \to 4S = \frac{a^3}{R} \to S = \frac{a^3}{4R}$$

از طرفی $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$$\to \frac{a^3}{\cancel{4}R} = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}}\cancel{a^2} \to a = \sqrt{3}R$$

$$\to S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}R)^2 \Rightarrow S = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$$



سؤال ۸) حالت اول: یکی از اضلاع زاویه محاطی قطر دایره است. از رأس B به مرکز دایره وصل می‌کنیم، خواهیم داشت:

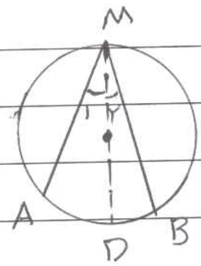
$\hat{O}_1 = \overset{\frown}{AB}$ زاویه مرکزی

$\hat{O}_1 = \hat{M} + \hat{B}$ زاویه خارجی غیر مجاور

$\hat{M} = \hat{B}$ در مثلث متساوی‌الاضلاع OMB

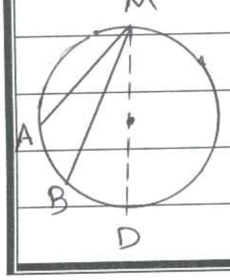
$\to \hat{O}_1 = 2\hat{M} \to \hat{M} = \frac{\hat{O}_1}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

۱ نمره



حالت دوم: اضلاع زاویه محاطی در دو طرف مرکز دایره واقع شده است. از رأس زاویه به مرکز دایره وصل می‌کنیم و محل تقاطع آن را با دایره D می‌نامیم.

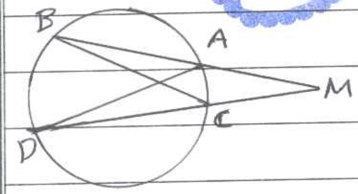
$\hat{M} = \hat{M}_1 + \hat{M}_2 = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} + \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BD}}{2} \Rightarrow \hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$ ۰/۲۵ نمره



حالت سوم: اضلاع زاویه محاطی در یک طرف مرکز دایره واقع شده است. از رأس زاویه به مرکز دایره وصل می‌کنیم و محل تقاطع آن را با دایره D می‌نامیم.

$\hat{M} = A\hat{M}D - B\hat{M}D = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} - \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BD}}{2} \Rightarrow \hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$ ۰/۲۵ نمره

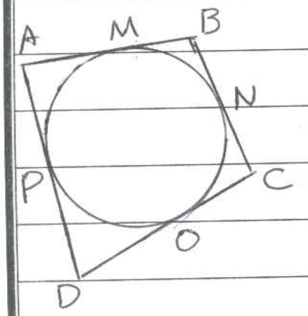
جواب سؤال ۹) نقاط A و D را به یکدیگر و نقاط B و C را به یکدیگر وصل می‌کنیم.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}=\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2}\\ \hat{M}=\hat{M}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} MBC \sim MAD \Rightarrow \frac{MA}{MC}=\frac{MD}{MB}$$

$\Rightarrow MA\cdot MB = MC\cdot MD$ ۱ نمره

جواب سؤال ۱۰) رفت قضیه



فرض { چهارضلعی ABCD محیطی است

حکم { $AB+DC=AD+BC$

می‌دانیم شعاع‌های رسم شده بر یک دایره از نقطه‌ای خارج دایره با یکدیگر برابرند بنابراین داریم:

$AM=AP$

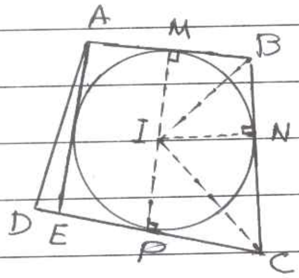
$BM=BN$

$DO=DP$

$CO=CN$

دو طرف تساوی‌ها را جمع می‌کنیم

$\underline{AM+BM}+\underline{DO+CO}=\underline{AP+DP}+\underline{BN+CN} \Rightarrow AB+DC=AD+BC$ ۱ نمره



برگشت قضیه: نیمسازهای دو زاویه B و C همدیگر را در نقطه‌ای مانند I قطع می‌کنند. با توجه به ویژگی نیمساز، نقطه I از سه ضلع CD و BC و AB که اضلاع زاویه‌های B و C هستند به یک فاصله است $R=IM=IN=IP$ پس به مرکز I و شعاع R دایره‌ای رسم می‌کنیم و این دایره بر سه ضلع AB و BC و DC از چهارضلعی ABCD مماس خواهد بود و اگر این ضلع بر ضلع AD مماس نباشد (برهان خلف) آنگاه از نقطه A، خطی مماس رسم کرده و محل تقاطع آن را با ضلع DC نقطه E می‌نامیم. آنگاه خواهیم داشت:

فرض { $AB+DC=AD+BC$

حکم { چهارضلعی ABCD محیطی است

$$\left.\begin{array}{l}\text{طبق فرض} \leftarrow AB+DC=AD+BC\\ \text{طبق رفت قضیه و برهان خلف ما} \leftarrow AB+EC=AE+BC\end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{DC-EC}_{DE}=AD-AE$$

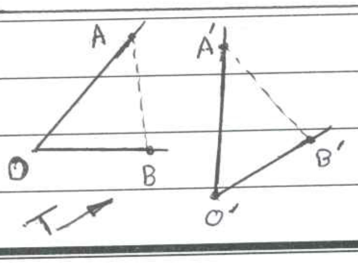
طرفین تساوی‌ها را از هم کم می‌کنیم

$\Rightarrow AE+DE=AD$

و چون این رابطه در مورد اضلاع یک مثلث (ADE) امکان ندارد لذا AE بر AD منطبق است یعنی بر دایره رسم شده مماس است. پس چهارضلعی ABCD محیطی است. ۱ نمره

سؤال ۱۱) چهار حالت هر حالت ۰/۲۵ نمره و اثبات در جزوه موجود است!!

سؤال ۱۲) فرض می‌کنیم T تبدیل طولپا است و داریم



$$\left.\begin{array}{l}T(A)=A'\\ T(B)=B'\\ T(O)=O'\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}OA=O'A'\\ OB=O'B'\\ AB=A'B'\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle OAB \cong \triangle O'A'B' \Rightarrow \hat{O}=\hat{O'}$$ ۱ نمره