

معرفی مجموعه:

در واقع مجموعه، گروه یا دسته‌ای از اشیای مشخص و متمایز (غیر تکراری) است.

مثال‌های زیر مجموعه اند:

مجموعه‌ی روزهای هفته - مجموعه‌ی اعداد صحیح فرد - دانش آموزان کلاس شما -
جواب‌های معادله $22 + 8 = 1$

مثال‌های زیر مجموعه نیستند:

سه نفر از شغرای معروف ایران - سه تابلو از نقاشی‌های زیبای جهان - انسان‌های قد بلند - عدد‌ها
بسیار بزرگ -

نمایش مجموعه:

مجموعه‌ها را با حروف بزرگ انگلیسی A، B، C و ... و اعضای آن را در داخل آکولاد ({ })
نمایش می‌دهند.

مثال: مجموعه‌ی شماره‌های عدد ۱۲ را بنویسید.

دو علامت در مجموعه‌ها:

← عضو بودن یا متعلق بودن ← عضو نبودن یا مستقل نبودن

مثال: اگر مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 5, 7\}$ را در نظر بگیریم:

$2 \in A$ می‌خوانیم $8 \notin A$ می‌خوانیم

نکاتی مهم در مجموعه‌ها:

(۱) در نوشتن یک مجموعه تکرار عضوهای اثر است یعنی داریم: $A = \{1, 5, 8, 8, 8, 5, 1\} = \{1, 5, 8\}$

(۲) در نوشتن یک مجموعه ترتیب اعضا مهم نیست یعنی داریم: $\{5, 9, 7\} = \{7, 9, 5\}$

(۳) مجموعه‌ی تهی، مجموعه‌ی است که هیچ عضوی ندارد و با نماد $\{\}$ یا \emptyset نمایش می‌دهیم. توجه داشته باشید که این مجموعه با مجموعه‌ی $\{\emptyset\}$ یا $\{\{\}$ که هر کدام دارای یک عضو هستند، یکی نیستند.

مثال) کدام یک از عبارات های زیر، مجموعه تهی را مشخص می کند

الف) عدد های طبیعی بین ۵ و ۶

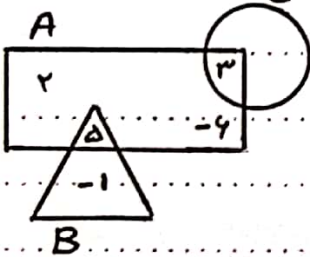
ب) عدد های اول و زوج

نمایش مجموعه ها با استفاده از نمودار ورن :

مجموعه را می توان با استفاده از منحن ها یا خط های بشکسته بیسته نمایش داد؛ به عنوان مثال مجموعه $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ را به صورت زیر نمایش می دهیم که نمایش با استفاده از نمودار ورن است.



مثال) الف: با توجه به نمودار ورن اعضای هر مجموعه را بنویسید



ب: درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید

$۳ \in A$

$۵ \notin A$

دو مجموعه برابر:

اگر هر عضو مجموعه A عضوی از مجموعه B و هر عضو B عضوی از مجموعه A باشد؛ در این صورت

دو مجموعه A و B برابر است و می نویسیم $A = B$

مثال: $A = \{۱, ۲, ۲, ۳, ۳, ۳\}$
 $B = \{۱, ۲, ۳\}$

$\Rightarrow A = B$

مثال: جاهای خالی را در مجموعه های زیر طوری پر کنید که مجموعه ها برابر باشد

الف) $\left\{ \sqrt{۲۵}, \dots, \frac{-\sqrt{۴۴}}{(-۲)^۲}, ۳, \frac{۲}{۵}, \dots, ۵ \right\} = \left\{ \frac{۲}{۵}, \dots, \frac{۹}{۳}, ۴, \dots, \frac{۲}{۵}, \dots, ۵ \right\}$

ب)

مثال: دو مجموعه $B = \{4, 6, 3, 1\}$ و $A = \{7, x+2, 3\}$ را داریم اگر این دو مجموعه مساوی باشند x و y را بیابید.

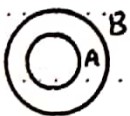
مثال: اگر دو مجموعه $B = \{4, 8, 4\}$ و $A = \{-1, x+1, 4\}$ مساوی باشند مقدار $(y-x)^2$ کدام است؟

۱. ۲۶ ۲. ۳۶ ۳. ۶۴ ۴. ۶۴

مثال: اگر $\{2a\} = \{(2x-5), (25-3x)\}$ باشد a را به دست آورید.

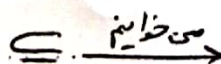
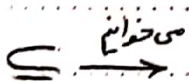
زیرمجموعه:

اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند مجموعه A را زیرمجموعه B می گوئیم هرگاه هر عضو A عضوی از B نیز باشند و با علامت $A \subseteq B$ نشان می دهیم و شکل آن به قرار زیر است:



مثال: اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ باشد آیا $A \subseteq B$ است یا خیر؟

نکته: اگر عضوی در A باشد که در B نباشد می گوئیم A زیرمجموعه B نیست و می نویسیم $A \not\subseteq B$ در مثال بالا $B \not\subseteq A$ چون



بنابراین:

نکته ۱: هر مجموعه ای زیر مجموعه خودش است یعنی اگر A مجموعه ای دلخواه باشد داریم $A \subseteq A$.

نکته ۲: مجموعه \emptyset تقبی زیر مجموعه هر مجموعه است یعنی اگر A مجموعه ای دلخواه باشد داریم $\emptyset \subseteq A$ یا $\{ \} \subseteq A$ چون
یا اگر مثلاً B مجموعه ای دلخواه باشد $\{ \} \subseteq B$ چون

مثال) تمام زیر مجموعه های $A = \{ ۲, ۳, ۴ \}$ را بنویسید.

مثال) تمام زیر مجموعه های $\{ a, b, c, d \}$ را بنویسید.

نکته: تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی از دستور 2^n به دست می آید. ^{تعداد اعضا}

مثال) یک مجموعه ۴ عضوی چند زیر مجموعه دارد؟

مثال) یک مجموعه ۵ عضوی چند زیر مجموعه دارد؟

مثال) اگر تعداد زیر مجموعه های مجموعه ای ۱۲۸ باشد؟ آن مجموعه چند عضو دارد؟

مسئله (۱) اگر داشته باشیم... $A = \{\emptyset, 1, 2, 3\}$ ؛ کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

۱) $3 \in A$ ۲) $\{1, 2\} \in A$ ۳) $\emptyset \in A$

۴) $\{1, 2\} \subset A$ ۵) $A \subseteq A$ ۶) $\{\{1, 2\}\} \subseteq A$

۷) $\{\{1, 2\}\} \in A$ ۸) $\emptyset \subseteq A$

مسئله (۲) با توجه به مجموعه $A = \{\{1, 2\}, 3, 4, 5\}$ ؛ کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

۱) $\{3\} \in A$ ۲) $\{\{3\}\} \in A$ ۳) $\{1, 2\} \in A$

۴) $\{\{1, 2\}\} \subseteq A$ ۵) $\{\{3\}\} \subseteq A$ ۶) $\emptyset \subseteq A$

نمایش مجموعه های اعداد:

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

مجموعه اعداد طبیعی

$$W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

مجموعه اعداد حسابی

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

مجموعه اعداد صحیح

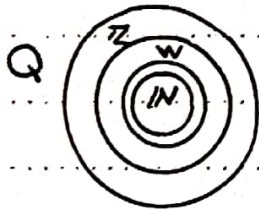
مجموعه ی عددهای گویا را با Q نمایش می دهیم چون اولین عدد گویای بزرگتر از هر عدد گویا مشخص نیست
 لذا توان این مجموعه را با عضوها مشخص کردیم. به همین دلیل مجموعه اعداد گویا را با نماد ریاضی
 تعریف می کنیم

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$$

مجموعه ی اعداد گویا

هر عدد صحیح، عددی گویا است مثال: $5 \in Q$ و $-1 \in Q$

و همچنین اعداد گویا هستند مثال: $\frac{2}{3} \in Q$ و $-\frac{4}{5} \in Q$



نکته: $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q$ بنا براین

نمایش مجموعه ها با علائم ریاضی (نماد ریاضی)

$$E = \{2, 4, 6, \dots\}$$

مجموعه اعداد طبیعی زوج

$$O = \{1, 3, 5, \dots\}$$

مجموعه عددهای طبیعی فرد

نکته: و بنابراین مجموعه‌ها را یا با نوشتن اعضا یا با نماد ریاضی نمایش می‌دهند:

مثال: مجموعه‌های زیر را با علامت ریاضی (نماد ریاضی) نمایش دهید:

$$A = \{7, 8, 9, \dots\}$$

$$B = \{-7, -8, -9, \dots\}$$

$$C = \{7, 8, 9, \dots, 19\}$$

$$D = \{-7, -8, -9, \dots, -19\}$$

$$E = \{10, 11, 12, \dots\}$$

$$F = \{-10, -11, -12, \dots\}$$

مثال: مجموعه‌های زیر را با علامت ریاضی نمایش دهید:

$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$$

$$B = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$$

$$C = \{2, 4, 6, \dots\}$$

$$D = \{2, 4, 8, \dots\}$$

$$E = \{3, 6, 9, \dots\}$$

$$F = \{3, 9, 27, \dots\}$$

مسئله (مجموعه‌ها). زیر را با نوشتن اعضایش مشخص کنید.

$$A = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}, -2 < x < 1\}$$

$$B = \{3x-1 \mid x \in \mathbb{N}, -3 < x < 3\}$$

$$C = \{x^2-1 \mid x \in \mathbb{N}, x > -2\}$$

$$D = \{x^2+2 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 3\}$$

$$E = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x < 3\}$$

$$F = \{2^x \mid x \in \mathbb{N}\}$$

$$G = \left\{ \frac{3x}{x+1} \mid x \in \mathbb{N}, -1 < x < 2 \right\}$$

$$H = \left\{ 2x \mid x \in \mathbb{Z}, \frac{3}{x} \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$I = \{x^2 - 1 \mid x \in \mathbb{Z}, -2 < x < 2\}$$

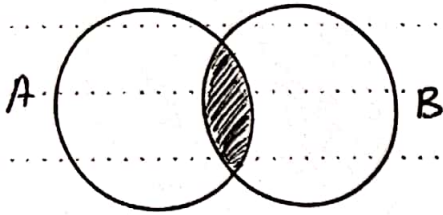
$$J = \{-x^2 \mid x \in \mathbb{N}, -1 < x^2 \leq 4\}$$

اجمال بر روی مجموعه ها:

در کتاب ریاضی نهم روی مجموعه ها ۳ عمل اشتراک، اجتماع و تفاضل تعریف می شود.

اشتراک دو مجموعه:

اشتراک دو مجموعه A و B ، مجموعه ای شامل همه عضوهای است که هم عضو مجموعه A و هم عضو مجموعه B است این مجموعه را با نماد $A \cap B$ نشان می دهیم و نمودار آن به شکل زیر است.



$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \in B\}$$

مثال اگر $A = \{1, 3, 7, 9\}$ و $B = \{2, 3, 5, 9\}$ باشد $A \cap B$ را به دست آورید.

نکته:

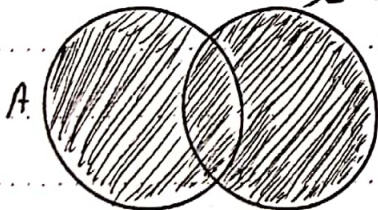
$$A \cap A = A \quad (1)$$

$$A \cap B = B \cap A \quad \leftarrow \text{یعنی در اشتراک خاصیت جابه جایی وجود دارد.} \quad (2)$$

$$A \subseteq B \implies A \cap B = A \quad (3)$$

اجتماع دو مجموعه:

اجتماع دو مجموعه A و B ، مجموعه ای است شامل همه عضوهایی که حداقل در یکی از دو مجموعه A و B باشد این مجموعه را با نماد $A \cup B$ نشان می دهیم و نمودار آن به شکل زیر است.



$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

مثال اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 3, 5\}$ باشد $A \cup B$ را به دست آورید.

چند نکته:

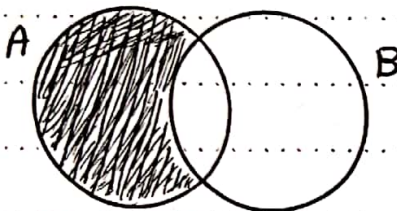
(۱) $A \cup A = A$

(۲) $A \cup B = B \cup A$ ← یعنی در اجتماع خاصیت جابه جایی وجود دارد

(۳) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$

تفاضل دو مجموعه:

م منظور از $A - B$ یعنی عضوهایی را از A می نویسیم که این اعضا در B نباشند و شکل آن به قرار زیر است:

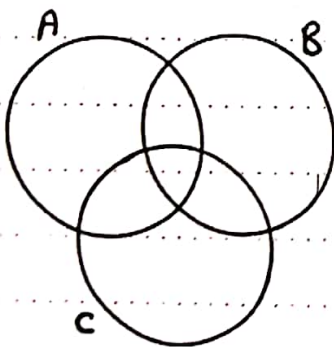


$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

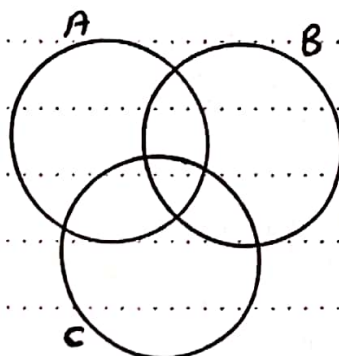
مثال اگر $A = \{۲, ۳, ۵, ۷, ۹\}$ و $B = \{۱, ۴, ۵, ۹, ۱۱\}$ باشد مطلوب است حاصل:

- الف) $A - B$ ب) $B - A$ ج) $A - (A \cap B)$

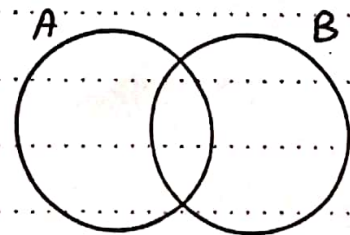
مثال در هر یک از شکل های زیر مجموعه ای مورد نظر را هاشور بزنید:



$A \cup (B \cap C)$



$A \cap (B \cup C)$



$(A \cup B) - A$

قرار داد. تعداد عضوها^ک هر مجموعه مانند A را با $n(A)$ نمایش می دهیم. به عنوان مثال، اگر A

مجموعه ای K عضو باشد، می نویسیم $n(A) = K$.

مثلاً اگر $A = \{2, 4, 6, 7\}$ در این صورت $n(A) = 4$.

مثال) اگر $A = \{2, 5, 7, 8\}$ و $B = \{3, 5\}$ باشد آیا $n(A-B) = n(A) - n(A \cap B)$ درست است؟

یا خیر؟

مثال) اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ و } \frac{12}{x} \in \mathbb{N}\}$ باشد در این صورت $n(A)$ و تعداد زیرمجموعه ها^ک A را

بنویسید.

مثال) اگر $A = \{n^2 - 4n \mid n \in \mathbb{N} \text{ و } n < 7\}$ باشد در این صورت $n(A)$ و تعداد زیرمجموعه ها^ک

A را بنویسید.

«تمرینات»

۱) چند زیرمجموعه از مجموعه $A = \{d, c, b, a\}$ می توان انتخاب کرد که حتماً شامل عضو a باشد

۲) چند زیرمجموعه از مجموعه $A = \{e, d, c, b, a\}$ می توان انتخاب کرد که حتماً شامل عضو

باشد

۳- چند زیر مجموعه از مجموعه $A = \{e, d, c, b, a\}$ می توان انتخاب کرد که حتماً شامل عضو b باشد ولی فاقد عضو a باشد.

۴- چند مجموعه مانند A وجود دارد که در رابطه زیر صدق کند؟
 $\{2, 4, 6\} \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

۵- اگر $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup X = \{2, 3\}$ باشد، به جای X چند مجموعه می توان قرار داد؟

۶- اگر داشته باشیم $A = \{3, 4, 5\}$ و $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ و $C = \{1, 2, 7\}$ مقدار K چند است تا داشته باشیم $B - C = A$ ؟

۷- اگر $\left\{ \left\{ \frac{1}{n} + x, x \right\} \right\} = \left\{ \{2\}, \{2, 3\} \right\}$ باشد، $n + x$ را بیابید.

۸- طرف دوم تساوی های زیر را کامل کنید

الف) $W - N =$ ب) $(N - Z) \cap (Z - N) =$

ج) $(N - Z) \cup (Z - N)$

مثال (۱). اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 4\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -3 < x < 3\}$ باشد حاصل $A \cap B$ و $B - A$ را به دست آورید.

مثال (۲). اگر $A = \{x \mid \frac{x}{2} \in \mathbb{Z}\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 \leq 1\}$ باشد حاصل $B - A$ را به دست آورید.

مثال (۳). اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 4\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -2 < x < 1\}$ باشد حاصل $A - B$ و $B - A$ را به دست آورید.

پدیده‌ها تصادفی (آزمایش تصادفی):

به پدیده‌هایی که از به وقوع پیوستن آنها اطمینان نداشته باشیم ولی مجموعه نتایج آن قابل پیش‌بینی است. مانند پرتاب یک تاس یا پرتاب یک سکه

فضای نمونه: مجموعه‌ای متناهی که در به وقوع پیوستن یک پدیده تصادفی را فضای نمونه می‌نامیم و با S نمایش می‌دهیم

مثال ۱) یک تاس را به هوا پرتاب می‌کنیم فضای نمونه‌ی آن را مشخص کنید

مثال ۲) دو تاس را با هم به هوا پرتاب می‌کنیم فضای نمونه‌ی آن را مشخص کنید

مثال ۳) یک سکه را سه بار متوالی پرتاب می‌کنیم فضای نمونه‌ی آن را مشخص کنید

مثال ۴) سه سکه را با هم به هوا پرتاب می‌کنیم فضای نمونه‌ی آن را بنویسید

مثال ۵) فضای نمونه‌ی یک خانواده‌ی دو فرزند که هر فرزند می‌تواند پسر یا دختر باشد را بنویسید

مثال ۶) دو تاس n رگه را به هم میزنیم و به ترتیب از آنها عددی میخوانیم. چقدر احتمال دارد که...

پیشامد تصادفی A

هر زیرمجموعه B از فضای Ω را یک پیشامد تصادفی و آن را با حرف بزرگ انگلیسی نمایش میدهیم.

مثال ۱) تاسی را به هم میزنیم و به ترتیب از آنها عددی میخوانیم. چقدر احتمال دارد که...

مثال ۲) دو مکعب (تاس) را با هم میزنیم و به ترتیب از آنها عددی میخوانیم. چقدر احتمال دارد که...

الف) عدد های رو شده مساوی باشند

ب) مجموع عدد های رو شده ۹ باشد

ج) حداقل یکی از تاس ها ۵ باشد

ح) فقط یکی از تاس ها ۵ باشد

مثال ۳) خانواده ای دارای ۳ فرزند است. اگر پیشامد A ، هم جنس بودن دو فرزند اول و پیشامد B وجود فقط یک فرزند پسر در این خانواده باشد A و B را مشخص کنید.

احتمال:

اگر S فضای نمونه یک آزمایش تصادفی باشد و A یک پیشامد از این فضای نمونه باشد در این صورت احتمال رخداد پیشامد A که با نماد $P(A)$ نشان داده می شود به صورت زیر تعریف می شود:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد حالات کل}}$$

مثال (۱) تمامی راسی اندازیم چقدر احتمال دارد مضرب ۲ باشد؟

مثال (۲) دو تاس را با هم پرتاب می کنیم احتمال این که مجموع عدد های رو شده ۷ دو تاس مضرب ۳ باشد را به دست آورید.

مثال (۳) از جعبه ای که حاوی ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب خراب است یک سیب به تصادف برمی داریم. مطلوب است احتمال آن که:

الف) این سیب خراب نباشد.

ب) این سیب سالم یا خراب باشد.

مثال (۴) مضرب n یک عدد رومی عدد ۱۲ رومی نویسیم و یک عدد به تصادف از بین آنها انتخاب می کنیم احتمال این که عدد انتخاب شده مضرب ۲۴ یا بشمارنده ۳۶ باشد چقدر است.

مسئله ۵) دو تابه را با هم بر تابه می‌کنیم احتمال اینکه عدد رو شده در تابه اول زوج و در تابه دوم فرد باشد.....

مسئله ۶) در بر تابه حجم زمان یک تابه و یک سکه احتمال آن که تابه مضرب ۳ باشد چیست باید را بسازید.....

مسئله ۷) سکه ای را ۳ بار بر تابه می‌کنیم احتمال آن که حداقل دو بار رو بسازد چقدر است؟

مسئله ۸) یک تابه و یک سکه را همزمان بر تابه می‌کنیم احتمال اینکه سکه رو نیاید یا تابه مضرب ۴ بسازد.....